Problème 1 (piste bleue) Pour tout x dans $]-1,1[$ et tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = \ln(1+x^n)$.

Question 1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur l'intervalle $]-1,1[$.
Pour tout x dans cet intervalle, on pose alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \ln(1+x^n).$$

Question 2. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $]-1,1[$. Montrer néanmoins que la fonction f est continue sur cet intervalle (on traitera séparément l'intervalle $[0,1[$ et l'intervalle $]-1,0]$; on justifiera que la fonction $|f_n|$ est décroissante sur $]-1,0]$ quelle que soit la parité de n).

Question 3. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers 1.

Question 4. On fixe momentanément x dans $]0,1[$. Pour tout N dans $\mathbb{N}^*$, prouver l'encadrement

$$\int_0^{\mathrm{N}} \ln(1+x^t)\ \mathrm{d}t + \ln(1+x^{\mathrm{N}}) \leqslant \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \ln(1+x^n) \leqslant \int_0^{\mathrm{N}} \ln(1+x^t)\ \mathrm{d}t + \ln(2).$$

Question 5. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(1+\mathrm{e}^{-u})\ \mathrm{d}u$ existe. Sa valeur est notée σ dans la suite.

Question 6. Montrer que $f(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sigma}{1-x}$ quand x tend vers 1.

Question 7. À l'aide du théorème d'intégration terme à terme, prouver l'égalité $\sigma = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et en déduire la valeur de σ.

Problème 2 (piste rouge) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit sur $]0,+\infty[$ la fonction $f_n : x \mapsto n\ \mathrm{e}^{-n^2 x}$.

Question 8. Prouver que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Sa somme est notée F.

Question 9. La série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur l'intervalle $]0,+\infty[$?

Question 10. Prouver que la fonction F est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Dans la suite, pour tout $x>0$, on définit une fonction g_x sur l'intervalle $[0,+\infty[$ par la formule

$$\forall t \in [0,+\infty[, \qquad g_x(t) = t\ \mathrm{e}^{-t^2 x}$$

et on note n_x la partie entière du nombre $1/\sqrt{2x}$.

Question 11. Soit $x>0$. Étudier les variations de la fonction g_x.

Question 12. Soit $x>0$. Soit un entier $\mathrm{N} \geqslant n_x + 1$. Prouver l'inégalité

$$\int_0^{n_x} g_x(t)\ \mathrm{d}t + \int_{n_x+1}^{\mathrm{N}+1} g_x(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} g_x(n).$$

Question 13. Soit $x>0$. Soit un entier $\mathrm{N} \geqslant n_x + 2$. Prouver l'inégalité

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} g_x(n) \leqslant \int_1^{n_x} g_x(t)\ \mathrm{d}t + \int_{n_x+1}^{\mathrm{N}} g_x(t)\ \mathrm{d}t + g_x(n_x) + g_x(n_x+1).$$

Question 14. En déduire un encadrement de $\mathrm{F}(x)$.

Question 15. En déduire un équivalent simple de $\mathrm{F}(x)$ quand x tend vers 0.

Problème 3 — Produit de Kronecker

Soient ℓ, n, p, r quatre entiers strictement positifs. Étant donné une matrice A de $\mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{C})$ et une matrice B de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$, on définit le *produit de Kronecker* par la formule

$$\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_{1,1}\mathrm{B} & \cdots & a_{1,n}\mathrm{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\ell,1}\mathrm{B} & \cdots & a_{\ell,n}\mathrm{B} \end{pmatrix},$$

où les $a_{i,j}$ sont les coefficients de la matrice A. La matrice $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ est alors un élément de $\mathcal{M}_{\ell p,nr}(\mathbb{C})$.

Partie I — propriétés calculatoires

Question 16. Soient A dans $\mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{C})$ et B dans $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$. Prouver l'équivalence

$$\mathrm{A} \otimes \mathrm{B} = 0 \iff (\mathrm{A} = 0 \text{ ou } \mathrm{B} = 0).$$

Question 17. Prouver que l'application $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \mapsto \mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$, définie de $\mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$ vers $\mathcal{M}_{\ell p,rn}(\mathbb{C})$, est bilinéaire.

Question 18. On considère deux entiers strictement positifs t et v. Soient

$$\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{\ell,n}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{B} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{C} \in \mathcal{M}_{r,t}(\mathbb{C}), \quad \mathrm{D} \in \mathcal{M}_{t,v}(\mathbb{C}).$$

Prouver l'égalité $(\mathrm{A} \otimes \mathrm{C}) \times (\mathrm{B} \otimes \mathrm{D}) = (\mathrm{A} \times \mathrm{B}) \otimes (\mathrm{C} \times \mathrm{D})$.

Question 19. Soient A dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et C dans $\mathrm{GL}_p(\mathbb{C})$. Montrer que la matrice $\mathrm{A} \otimes \mathrm{C}$ appartient à $\mathrm{GL}_{np}(\mathbb{C})$ et préciser son inverse en fonction de A^{-1} et de C^{-1}.

Question 20. Application numérique : montrer que la matrice

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer son inverse.

Question 21. Soient A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et C dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Rappeler rapidement pourquoi on peut affirmer que la matrice A est trigonalisable puis, en utilisant ce fait, démontrer l'égalité

$$\mathrm{dét}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{C}) = (\mathrm{dét}(\mathrm{A}))^p \times (\mathrm{dét}(\mathrm{C}))^n.$$

On pourra justifier que si A est semblable à une certaine matrice T, alors $\mathrm{A} \otimes \mathrm{C}$ est semblable à $\mathrm{T} \otimes \mathrm{C}$.

Question 22. Montrer que si $\mathrm{A} \otimes \mathrm{C}$ est inversible, alors les matrices A et C sont inversibles.

Partie II — non-commutativité du produit de Kronecker

Dans cette partie, on considère deux entiers n et p strictement positifs fixés.

On note $(\mathrm{U}_1, \ldots, \mathrm{U}_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $(\mathrm{V}_1, \ldots, \mathrm{V}_p)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$.

Question 23. Trouver une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que les matrices $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$ et $\mathrm{B} \otimes \mathrm{A}$ soient distinctes.

Question 24. Reconnaître les matrices de la forme $\mathrm{U}_i \otimes \mathrm{V}_j$ et $\mathrm{V}_j \otimes \mathrm{U}_j$.

Question 25. En déduire une matrice P de $\mathrm{GL}_{np}(\mathbb{C})$ telle que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et toute matrice B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on ait

$$\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{A} \otimes \mathrm{B})\mathrm{P} = \mathrm{B} \otimes \mathrm{A}.$$

Partie III — réduction

Dans cette partie, on fixe de nouveau des entiers n et p strictement positifs. On fixe également une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et une matrice B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Question 26. On suppose que A et B sont diagonalisables. Montrer que $A \otimes B$ est diagonalisable.

Question 27. Application numérique : diagonaliser la matrice suivante

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Question 28. Trouver un exemple dans lequel $A \otimes B$ est diagonalisable mais A ne l'est pas.

Dans la suite de cette partie, on va s'attacher à démontrer une réciproque partielle de l'implication précédente.

Question 29. On factorise les polynômes caractéristiques de A et de B comme suit

$$\chi_A = \prod_{a=1}^{n} (X - \lambda_a) \qquad \text{et} \qquad \chi_B = \prod_{b=1}^{p} (X - \mu_b).$$

Prouver que le polynôme caractéristique de $A \otimes B$ est alors le polynôme

$$\prod_{a=1}^{n} \prod_{b=1}^{b} (X - \lambda_a \mu_b).$$

Question 30. Dans cette question, on suppose que A possède au moins une valeur propre non nulle. On considère une telle valeur propre, notée λ, ainsi qu'un vecteur propre U associé. On introduit la notation

$$E(U) = \{U \otimes V \ ; \ V \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})\}.$$

Montrer que E(U) est stable par $A \otimes B$.

Question 31. Prouver que l'application $u : V \mapsto U \otimes V$ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ sur E(U).

Question 32. Dans cette question, on suppose de nouveau que A possède au moins une valeur propre non nulle. On suppose également que $A \otimes B$ est diagonalisable.

Prouver alors que B est diagonalisable.

Question 33. Dans cette question, on suppose que la matrice $A \otimes B$ est diagonalisable et qu'elle est différente de la matrice nulle.

Prouver alors que les matrices A et B sont toutes deux diagonalisables.

Question 34. Quelles sont les matrices B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ telles que la matrice $\begin{pmatrix} B & B \\ 0 & B \end{pmatrix}$ soit diagonalisable ?

Exercice 1. (**) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel normé $(E, ||\ ||)$ de dimension finie.

Montrer que l'égalité $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$ équivaut à l'existence de $C > 0$ tel que $\forall x \in E, \ ||f(x)|| \leqslant C \times ||f^2(x)||$.

Exercice 2. (**) Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit A un ouvert de E. Soit B une partie quelconque de E.

a. Prouver l'égalité $\mathrm{Adh}(A \cap B) = \mathrm{Adh}(A \cap \mathrm{Adh}(B))$.

b. Trouver un contre-exemple dans le cas où A n'est pas ouvert.
