Séries numériques

1 Séries numériques

1.1 Vocabulaire et notations

1.1.1 Série numérique

Une *série numérique* est une somme abstraite infinie de scalaires (réels ou complexes) [1], notée

$$\sum_{n\geqslant 0} u_n \qquad \text{ou parfois} \qquad \sum u_n.$$

Parfois, les termes de cette somme ne sont pris en compte qu'à partir d'un certain indice n_0, auquel cas la série est notée

$$\sum_{n\geqslant n_0} u_n.$$

1.1.2 Somme partielle

Pour tout entier N, la *somme partielle* de rang N de la série $\sum u_n$ est le nombre

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} u_n.$$

Dans le cas plus général d'une série numérique de la forme

$$\sum_{n\geqslant n_0} u_n,$$

c'est pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant n_0$ que l'on définit la somme partielle de rang N par la formule

$$\sum_{n=n_0}^{\mathrm{N}} u_n.$$

1.1.3 Convergence d'une série numérique

Dire que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ *converge* signifie que la suite des suites partielles

$$\left(\sum_{n=n_0}^{\mathrm{N}} u_n\right)_{n\geqslant n_0}$$

converge. La notion de divergence se transmet également.

Soient n_1 et n_2 deux entiers avec $n_1 > n_2$. On remarque que les suites de sommes partielles

$$\left(\sum_{n=n_1}^{\mathrm{N}} u_n\right)_{n\geqslant n_1} \qquad \text{et} \qquad \left(\sum_{n=n_2}^{\mathrm{N}} u_n\right)_{n\geqslant n_2}$$

diffèrent d'une constante (à savoir $\sum\limits_{n=n_2}^{n_1-1} u_n$).

Par conséquent, les séries

$$\sum_{n\geqslant n_1} u_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant n_2} u_n$$

ont la même nature. On dit aussi que les premiers termes de la série n'ont pas d'influence sur la nature de la série en question.

Les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n$ converge forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

1. On pourrait en fait considérer des séries dont les termes sont pris dans n'importe quel espace vectoriel normé : des séries de matrices ou des séries de fonctions, typiquement. Ce thème n'est toutefois pas à notre programme.

1.1.4 Somme d'une série convergente

En cas de convergence, la limite de la suite des sommes partielles est appelée *la somme de la série*. On note

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{n=n_0}^{\mathrm{N}} u_n.$$

Soit $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ une série convergente.

Alors, pour tout entier $n_1 > n_0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant n_1} u_n$ converge aussi et leurs sommes sont reliées par la formule

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{n_1-1} u_n + \sum_{n=n_1}^{+\infty} u_n.$$

1.1.5 Reste d'une série convergente

Soit $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ une série convergente.

Pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant n_0$, on appelle *reste* d'ordre N de cette série ce qui reste de la somme quand on lui a retiré la somme partielle de rang N

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=n_0}^{\mathrm{N}} u_n = \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} u_n.$$

La suite des restes d'une série convergente est une suite de limite nulle.

1.1.6 Premiers exemples

- La série nulle $\sum\limits_{n\geqslant 0} 0$ est convergente. Sa somme est nulle, de même que toutes ses sommes partielles et ses restes.
- Pour toute constante α non nulle, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha$ est divergente.
- La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n$ est divergente. En effet, pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, la somme partielle de rang N s'exprime ainsi

$$\mathrm{S}_{\mathrm{N}} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (-1)^n = \frac{1-(-1)^{\mathrm{N}+1}}{1-(-1)} = \frac{1+(-1)^{\mathrm{N}}}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si N est pair} \\ 0 & \text{si N est impair.} \end{cases}$$

Les suites extraites $(\mathrm{S}_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{S}_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, de limites distinctes, donc la suite $(\mathrm{S}_{\mathrm{N}})_{\mathrm{N}\geqslant 0}$ est divergente.

On verra plus loin qu'on peut justifier directement la divergence de cette série en invoquant sa *divergence grossière*.

1.2 Séries de référence

1.2.1 Les séries géométriques

Soit z dans $\mathbb{C}$. On étudie ici la *série géométrique* $\sum_{n\geqslant 0} z^n$.

Premier cas : $|z| \geqslant 1$. Dans ce cas, la série $\sum z^n$ diverge grossièrement (son terme général ne tend pas vers 0).

Deuxième cas : $|z| < 1$. Dans ce cas, la série $\sum z^n$ converge et sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Plus généralement, dès que la raison a un module strictement majoré par 1, la somme s'exprime par

$$\text{somme de la série géométrique} = (\text{premier terme de la somme}) \times \frac{1}{1-\text{raison}}.$$

Par exemple, voici la somme d'une série géométrique de raison 1/4.

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{3}{2^{2n+1}} = \frac{3}{32} \times \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{8}.$$

1.2.2 Les séries de Riemann

Soit α dans $\mathbb{R}$.

Premier cas : $\alpha \leqslant 1$. Dans ce cas, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est divergente.

Deuxième cas : $\alpha > 1$. Dans ce cas, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente.

Exemples. Les séries

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/4}}$$

sont divergentes.

Les séries

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^3}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$$

sont convergentes.

1.2.3 La série exponentielle

Pour tout z complexe, la *série exponentielle* $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$$

Attention à ne pas oublier que la somme commence à l'indice 0. En commençant à l'indice 1, on peut remarquer que la formule serait fausse pour $z = 0$.

Démonstration. Fixons z dans $\mathbb{C}$ et définissons la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{tz}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ce qui permet d'appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à tout ordre.

Prenons n dans $\mathbb{N}$ et x dans $\mathbb{R}$. La formule de Taylor avec reste intégrale pour la fonction f à l'ordre n entre 0 et x s'écrit de manière littérale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t.$$

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, la dérivée k-ième de la fonction f est la fonction $t \mapsto \alpha^k \mathrm{e}^{\alpha t}$. On obtient donc

$$\mathrm{e}^{\alpha x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k x^k}{k!} + \int_0^x \alpha^{n+1} \mathrm{e}^{\alpha t} \frac{(x-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t.$$

On se place dans le cas particulier $x = 1$. La formule précédente donne

$$\mathrm{e}^{\alpha} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} = \alpha^{n+1} \times \int_0^1 \mathrm{e}^{\alpha t} \frac{(1-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t.$$

L'inégalité de la moyenne donne ensuite

$$\left| \mathrm{e}^{\alpha} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} \right| \leqslant |\alpha|^{n+1} \int_0^1 \left| \mathrm{e}^{\alpha t} \right| \times \frac{(1-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t.$$

Soit t dans $[0,1]$. On remarque l'égalité $\mathrm{e}^{\alpha t} = \mathrm{e}^{t \operatorname{Re}(\alpha) + \mathrm{i} t \operatorname{Im}(\alpha)}$ puis

$$\left| \mathrm{e}^{\alpha t} \right| = \mathrm{e}^{t \operatorname{Re}(\alpha)} \leqslant \mathrm{e}^{t\,|\operatorname{Re}(\alpha)|} \leqslant \mathrm{e}^{|\operatorname{Re}(\alpha)|}.$$

On injecte tout ceci dans la grande inégalité

$$\left| \mathrm{e}^{\alpha} - \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} \right| \leqslant |\alpha|^{n+1} \mathrm{e}^{|\operatorname{Re}(\alpha)|} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \, \mathrm{d}t = |\alpha|^{n+1} \mathrm{e}^{|\operatorname{Re}(\alpha)|} \times \frac{1}{(n+1)!}.$$

Le majorant tend vers 0 quand l'entier n tend vers $+\infty$. Ça prouve ce qui était annoncé. ♡

1.3 Série des différences d'une suite

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite numérique.
Soit un entier $n \geqslant n_0 + 1$. Un télescopage donne

$$u_n = u_{n_0} + \sum_{k=n_0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k).$$

Ainsi, la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ équivaut à celle de la *série des différences*

$$\sum_{k\geqslant n_0} (u_{k+1} - u_k).$$

Exemple 1. La suite $(\ln(n))_{n\geqslant 2}$ est divergente donc sa série des différences est divergente. Sa série des différences s'écrit

$$\sum_{n\geqslant 2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Exemple 2. Prenons un nombre complexe z tel que $|z| < 1$. On sait que la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (vers 0). On en déduit que la série $\sum(z^n - z^{n+1})$ est convergente. En simplifiant par la constante non nulle $1 - z$, on en déduit que la série $\sum z^n$ est convergente.

1.4 Divergence grossière

Si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ ne converge pas vers[2] 0, alors la série $\sum u_n$ est divergente.
On dit dans ce cas que cette série *diverge grossièrement.*

Attention, la réciproque est complètement fausse : il y a des séries divergentes dont le terme général tend vers 0, comme on le voit avec certaines séries de Riemann ou avec l'exemple du paragraphe précédent.

Exemple. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geqslant 1$, la suite $(z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 donc la série géométrique $\sum z^n$ est grossièrement divergente.

2 Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs

La remarque fondamentale

Si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est à termes réels positifs, alors la suite des sommes partielles est croissante à partir du rang n_0, donc elle admet une limite.
Si la suite des sommes partielles est majorée, on peut en déduire qu'elle converge, si bien que la série des u_n converge.
Dans le cas contraire, cette série diverge et la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$.

2.1 Critères de comparaison

2.1.1 Critère de domination

Proposition. On considère deux suites réelles $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_1}$.
On suppose qu'il existe un indice entier $n_2 \geqslant \max(n_0, n_1)$ vérifiant l'encadrement

$$\forall n \geqslant n_2, \qquad 0 \leqslant u_n \leqslant v_n.$$

Si la série des v_n converge, alors on peut en déduire que la série des u_n converge aussi. Dans ce cas, on peut également écrire l'inégalité

$$\sum_{n=n_2}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_2}^{+\infty} v_n.$$

Par contraposition, si la série des u_n diverge, on peut en déduire que la série des v_n diverge aussi.

2. Insistons bien là-dessus : ça ne veut pas nécessairement dire que cette suite a une limite non nulle ; elle peut aussi ne pas avoir de limite.

Démonstration du critère de domination. On suppose que la série des v_n converge. Pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant n_2$, on a alors

$$\sum_{n=n_2}^{\mathrm{N}} u_n \leqslant \sum_{n=n_2}^{\mathrm{N}} v_n \leqslant \sum_{n=n_2}^{+\infty} v_n.$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum_{n \geqslant n_2} u_n$ est donc majorée. On sait par ailleurs qu'elle est croissante. On en déduit qu'elle est convergente. La série des u_n est donc convergente. ♡

2.1.2 Critère de négligeabilité

On reprend les notations de la question précédente. On suppose que les deux suites ont leurs termes tous positifs à partir d'un certain rang. On fait de plus l'hypothèse de croissance comparée

$$u_n = \underset{n \to +\infty}{\mathrm{o}}(v_n).$$

Si la série des v_n converge, alors on peut en déduire que la série des u_n converge aussi.
Par contraposition, si la série des u_n diverge, on peut en déduire que la série des v_n diverge aussi.

Démonstration du critère de négligeabilité. L'hypothèse de négligeabilité donne en particulier l'existence d'un rang n_3 tel que pour tout entier $n \geqslant n_3$, on ait la majoration $u_n \leqslant v_n$.
On peut alors appliquer le critère de domination et en obtenir ses conséquences. ♡

2.1.3 Critère des équivalents

On suppose de nouveau que les deux suites ont leurs termes tous positifs à partir d'un certain rang.
On suppose de plus que u_n et v_n sont équivalents quand n tend vers $+\infty$.

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Démonstration du critère des équivalents. Le fait que u_n et v_n soient équivalents quand n tend vers $+\infty$ donne l'existence d'un rang n_3 tel que pour tout entier $n \geqslant n_3$, on ait les inégalités

$$u_n \leqslant 2v_n \qquad \text{et} \qquad v_n \leqslant 2u_n.$$

Le critère de domination permet d'en déduire que si l'une des deux séries $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_0} v_n$ est convergente, alors l'autre converge aussi.

Ces deux séries ont donc la même nature. ♡

2.1.4 Règle de d'Alembert (comparaison à des suites géométriques)

On considère une série $\sum u_n$ à termes réels strictement positifs (à partir d'un certain rang). On fait de plus l'hypothèse que le quotient u_{n+1}/u_n possède une limite ℓ quand n tend vers $+\infty$.

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell = 1$, alors on n'en sait pas assez pour conclure.

Remarque. Cette règle est bien adaptée au cas où le terme général a une allure « multiplicative », c'est-à-dire avec des exponentielles ou des factorielles.
À l'inverse, elle est inadaptée au cas où le terme général varie lentement, comme les séries de Riemann ou les séries de Bertrand (terme général en $\frac{(\ln(n))^\alpha}{n^\beta}$).

Démonstration de la règle de d'Alembert.

Premier cas. On se place dans le cadre de l'hypothèse $\ell < 1$. Prenons un élément r de l'intervalle $]\ell, 1[$ (on peut prendre par exemple le milieu de cet intervalle $(\ell+1)/2$. D'après la définition de la limite, il existe un rang n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant r.$$

En exploitant le fait que les u_k sont strictement positifs et en itérant cette inégalité, on obtient

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \leqslant r^{n-n_0} u_{n_0}.$$

Les inégalités $0 \leqslant r < 1$ donnent la convergence de la série $\sum r^n$. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.

Deuxième cas. On se place dans le cadre de l'hypothèse $\ell > 1$. La définition de la limite donne cette fois l'existence d'un indice n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1.$$

On en déduit alors la minoration

$$\forall n \geqslant n_0, \quad u_n \geqslant u_{n_0}$$

et cette minoration empêche la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de tendre vers 0. La série $\sum u_n$ est donc grossièrement divergente.

Troisième cas. Toutes les séries de Riemann donnent la valeur $\ell = 1$. Certaines d'entre elles convergent, d'autres divergent. Voilà pourquoi le cas $\ell = 1$ n'est pas conclusif. ♡

3 Convergence absolue

3.1 Définition

Étant donné une suite complexe $(z_n)_{n\geqslant n_0}$, dire que la série $\sum z_n$ converge absolument signifie que la série $\sum |z_n|$ converge.

C'est un concept qui en réalité ne fait pas intervenir la série $\sum z_n$.

3.2 Théorème

La convergence absolue implique la convergence (tout court).

En d'autres termes, la convergence de la série $\sum |z_n|$ implique celle de la série $\sum z_n$.

De plus, dans ce cas, il existe une version infinie de l'inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{n=n_0}^{+\infty} z_n \right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |z_n|.$$

Exemples. Les séries suivantes convergent car elles convergent absolument.

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{\exp(\mathrm{i}\ln(n))}{2^n}.$$

Attention. Il n'y a pas de notion de divergence absolue. Si la série $\sum |z_n|$ est divergente, on ne peut rien en déduire quant à la nature de la série $\sum z_n$.

3.3 Démonstration du théorème

Premier cas : suites à valeurs réelles. On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on suppose que la série $\sum |u_n|$ converge.

On remarque alors l'encadrement

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant |u_n| - u_n \leqslant 2|u_n|.$$

Par comparaison de termes positifs, on en déduit que la série $\sum(|u_n| - u_n)$ est convergente.

L'identité $u_n = |u_n| - (|u_n| - u_n)$ permet d'en déduire que la série $\sum u_n$ est convergente.

Cas général : suites à valeurs complexes. Soit une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que la série $\sum |z_n|$ converge.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on connaît les majorations

$$|\mathrm{Re}(z_n)| \leqslant |z_n| \qquad \text{et} \qquad |\mathrm{Im}(z_n)| \leqslant |z_n|.$$

On en déduit que les séries $\sum |\mathrm{Re}(z_n)|$ et $\sum |\mathrm{Im}(z_n)|$ convergent.

En utilisant le premier cas, on en déduit que les séries $\sum \mathrm{Re}(z_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(z_n)$ convergent.

Enfin, la relation $z_n = \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(z_n)$ permet de conclure que la série $\sum z_n$ est convergente. ♡

3.4 Adaptation des critères de comparaison

3.4.1 Adaptation du critère de domination

Soit $(z_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite complexe. Soit $(u_n)_{n\geqslant n_1}$ une suite réelle positive.

On fait l'hypothèse $z_n = \mathcal{O}(u_n)$ et on suppose que la série $\sum u_n$ converge.

On peut alors conclure que la série $\sum z_n$ converge absolument, si bien qu'elle converge.

3.4.2 Adaptation du critère de négligeabilité

Soit $(z_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite complexe. Soit $(u_n)_{n\geqslant n_1}$ une suite réelle positive.

On fait l'hypothèse $z_n = \mathcal{O}(u_n)$ et on suppose que la série $\sum u_n$ converge.

On peut alors conclure que la série $\sum z_n$ converge absolument, si bien qu'elle converge.

3.4.3 Adaptation du critère des équivalents

Soit $(z_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite complexe. Soit $(u_n)_{n\geqslant n_1}$ une suite réelle positive.

On fait l'hypothèse $|z_n| \sim u_n$ et on suppose que la série $\sum u_n$ converge.

On peut alors conclure que la série $\sum z_n$ converge absolument, si bien qu'elle converge.

3.4.4 Adaptation de la règle de d'Alembert

Soit $(z_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite complexe. On suppose que ses termes sont tous non nuls à partir d'un certain rang. On suppose aussi que le quotient $|\frac{z_{n+1}}{z_n}|$ possède une limite ℓ quand n tend vers $+\infty$.

- Si $\ell < 1$, alors la série $\sum |z_n|$ converge donc la série $\sum z_n$ converge.
- Si $\ell > 1$, alors la suite $(|z_n|)_{n\geqslant n_0}$ ne converge pas vers 0 donc la suite $(z_n)_{n\geqslant n_0}$ non plus, si bien que la série $\sum z_n$ diverge grossièrement.
- Si $\ell = 1$, il n'y a à nouveau pas de déduction à faire.

4 Séries alternées

4.1 Théorème « spécial » des séries alternées

4.1.1 Énoncé du théorème

Théorème (Leibniz). Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle décroissante qui converge vers 0.
Alors la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente.

De plus, pour tout entier N, le reste $\sum\limits_{n=\mathrm{N}}^{+\infty}(-1)^n u_n$ a le même signe que $(-1)^{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}$.

Enfin, pour tout entier N, on a la majoration $\left|\sum\limits_{n=\mathrm{N}}^{+\infty}(-1)^n u_n\right| \leqslant u_{\mathrm{N}}$. ♣

4.1.2 Remarques

1. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 en croissant, alors les inégalités sur les sommes partielles sont renversées mais les autres propriétés subsistent. En particulier, le signe du reste est toujours déterminé par le premier de la somme qui définit ce reste.
2. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 mais n'est décroissante qu'à partir d'un rang n_0, alors la série $\sum(-1)^n u_n$ converge aussi ; la propriété sur le signe du reste n'est valable a priori que si N est supérieur ou égal à n_0 ; idem pour les inégalités sur les sommes partielles.
3. Pour des séries absolument convergentes comme $\sum(-1)^n/n^2$ ou $\sum(-1)^n/n!$, la première partie de ce théorème est inutile ; cependant, les propriétés sur le signe du reste et l'encadrement de la somme peuvent être intéressantes.

4.1.3 Exemples

Les séries

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n},\qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}},\qquad \sum_{n\geqslant 2}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$$

sont convergentes, bien qu'elles ne convergent pas absolument.

Le théorème « spécial » donne de plus les inégalités

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}\leqslant 0,\qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\leqslant 0,\qquad \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}\geqslant 0.$$

4.1.4 Levons un malentendu de vocabulaire

Ce qu'on appelle une *série alternée*, c'est une série dont le terme général est de la forme $(-1)^n u_n$, les u_n ayant un signe constant à partir d'un certain rang. Il n'y a aucune hypothèse de décroissance a priori.

Dire qu'une série est alternée est donc insuffisant pour appliquer le théorème du paragraphe précédent. Une série alternée n'est pas forcément une *série vérifiant les hypothèses du théorème des séries alternées.*

Par exemple, voici des séries alternées divergentes

$$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n,\qquad \sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{(-1)^n}{n}\right).$$

4.1.5 Démonstration du théorème des séries alternées

Pour tout $\mathrm{N}\in\mathbb{N}$, posons $\mathrm{S_N}=\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}}(-1)^n$.

Pour tout $p\in\mathbb{N}$, on trouve

$$\mathrm{S}_{2p+2}-\mathrm{S}_{2p}=u_{2p+2}-u_{2p+1}\leqslant 0\qquad\text{et}\qquad \mathrm{S}_{2p+3}-\mathrm{S}_{2p+1}=-u_{2p+3}+u_{2p+2}\geqslant 0.$$

De plus, pour tout $p\in\mathbb{N}$, on trouve $\mathrm{S}_{2p+1}-\mathrm{S}_{2p}=-u_{2p+1}$, ce qui tend vers 0 quand p tend vers $+\infty$.

La suite $(\mathrm{S}_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante, la suite $(\mathrm{S}_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ est croissante et leur différence tend vers 0 : ces deux suites sont adjacentes. On en déduit qu'elles convergent vers une même limite ℓ.

On en déduit que la suite $(\mathrm{S_N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ converge elle-même vers ℓ, ce qui prouve que la série de terme général $(-1)^n u_n$ est convergente.

La suite $(\mathrm{S}_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ en décroissant donc tous ses termes sont minorés par ℓ. Cela donne

$$\forall \mathrm{N}\in\mathbb{N},\quad \sum_{n=0}^{2p}(-1)^n u_n\geqslant\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n\qquad\text{c'est-à-dire}\qquad 0\geqslant\sum_{n=2p+1}^{+\infty}(-1)^n u_n.$$

La suite $(\mathrm{S}_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ en croissant donc tous ses termes sont minorés par ℓ. Cela donne

$$\forall \mathrm{N}\in\mathbb{N},\quad \sum_{n=0}^{2p+1}(-1)^n u_n\leqslant\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n\qquad\text{c'est-à-dire}\qquad 0\leqslant\sum_{n=2p+2}^{+\infty}(-1)^n u_n.$$

On a alors prouvé le deuxième point, qui donne le signe du reste. Prenons maintenant un entier N. On obtient alors

$$|\mathrm{R_N}|=(-1)^{\mathrm{N}}\mathrm{R_N}=(-1)^{\mathrm{N}}(\mathrm{R}_{\mathrm{N}+1}+(-1)^{\mathrm{N}}u_{\mathrm{N}})=u_{\mathrm{N}}-|\mathrm{R}_{\mathrm{N}+1}|\leqslant u_{\mathrm{N}}.$$

Le dernier point du théorème est démontré. ♡

4.2 Réécriture de la somme (méthode)

Prenons une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante qui converge vers 0. La série $\sum(-1)^n u_n$ converge alors et il est possible de réécrire sa somme sous la forme d'une somme de série positive.

Pour cela, prenons N dans $\mathbb{N}^*$ et exprimons la somme partielle d'ordre $2\mathrm{N}-1$.

$$\sum_{n=0}^{2\mathrm{N}-1}(-1)^n u_n = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + u_{2\mathrm{N}-2} - u_{2\mathrm{N}-1}.$$

Regroupons les indices pairs d'une part, les indices impairs d'autre part.

$$\sum_{n=0}^{2\mathrm{N}-1}(-1)^n u_n = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} u_{2k} - \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1} u_{2k+1} = \sum_{k=0}^{\mathrm{N}-1}(u_{2k} - u_{2k+1}).$$

Comme la série des $(-1)^n u_n$ converge, tout ceci a une limite finie quand N tend vers $+\infty$. On en déduit que la série de terme général $u_{2k} - u_{2k+1}$ est convergente et on obtient l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n = \sum_{k=0}^{+\infty}(u_{2k} - u_{2k+1}).$$

Bien sûr, un calcul similaire donnerait

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n = \sum_{k=1}^{+\infty}(u_{2k} - u_{2k-1}).$$

L'intérêt d'avoir une écriture avec des termes positifs est de pouvoir ensuite procéder à des encadrements, comme on le voit dans le paragraphe suivant.

4.3 Complément : étude du reste

Pour tout $\alpha > 0$ et tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, posons $u_\mathrm{N}(\alpha) = \dfrac{1}{\mathrm{N}^\alpha}$ et $\mathrm{R}_\mathrm{N}(\alpha) = \sum\limits_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$. Le but de ce paragraphe est de prouver le développement asymptotique

$$\mathrm{R}_\mathrm{N}(\alpha) = \frac{(-1)^\mathrm{N}}{2\,\mathrm{N}^\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathrm{N}^{\alpha+1}}\right).$$

Étape 1. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, on prouve l'égalité $|\mathrm{R}_\mathrm{N}(\alpha)| + |\mathrm{R}_{\mathrm{N}+1}(\alpha)| = u_\mathrm{N}(\alpha)$.

Pour cela, fixons N dans $\mathbb{N}^*$. Le théorème des séries alternées donne

$$|\mathrm{R}_\mathrm{N}(\alpha)| = (-1)^\mathrm{N}\mathrm{R}_\mathrm{N}(\alpha) \qquad \text{et} \qquad |\mathrm{R}_{\mathrm{N}+1}(\alpha)| = (-1)^{\mathrm{N}+1}\mathrm{R}_{\mathrm{N}+1}(\alpha)$$

puis

$$|\mathrm{R}_\mathrm{N}(\alpha)| + |\mathrm{R}_{\mathrm{N}+1}(\alpha)| = (-1)^\mathrm{N}\left(\mathrm{R}_\mathrm{N}(\alpha) - \mathrm{R}_{\mathrm{N}+1}(\alpha)\right) = (-1)^\mathrm{N} \times (-1)^\mathrm{N} u_\mathrm{N}(\alpha) = u_\mathrm{N}(\alpha).$$

Étape 2. On prouve que la suite $(\mathrm{R}_\mathrm{N}(\alpha))_{\mathrm{N}\geqslant 1}$ est croissante.

Pour cela, on utilise la technique de réécriture du paragraphe précédent, qui permet de réécrire nos restes sous formes de sommes de termes positifs, ce qui se prête mieux à l'établissement d'inégalités.

$$\mathrm{R}_\mathrm{N}(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty}(u_{\mathrm{N}+2k}(\alpha) - u_{\mathrm{N}+2k+1}(\alpha)) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}_{\mathrm{N}+1}(\alpha) = \sum_{k=0}^{+\infty}(u_{\mathrm{N}+2k+1}(\alpha) - u_{\mathrm{N}+2k+2}(\alpha)).$$

Chacune des différences se met maintenant sous forme intégrale, en vertu de la formule classique (et fondamentale) $f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)\ \mathrm{d}t$. On l'utilise ici avec la fonction $f : t \mapsto -(t+\mathrm{N}+2k)^{-\alpha}$, de dérivée $f' : t \mapsto \alpha(t+\mathrm{N}+2k)^{-\alpha-1}$.

$$u_{\mathrm{N}+2k}(\alpha) - u_{\mathrm{N}+2k+1}(\alpha) = (\mathrm{N}+2k)^{-\alpha} - (\mathrm{N}+2k+1)^{-\alpha} = \alpha\int_0^1 (t+\mathrm{N}+2k)^{-\alpha-1}\ \mathrm{d}t.$$

On obtient de même

$$u_{\mathrm{N}+2k+1}(\alpha) - u_{\mathrm{N}+2k+2}(\alpha) = \alpha\int_0^1 (t+\mathrm{N}+2k+1)^{-\alpha-1}\ \mathrm{d}t.$$

Pour tout t dans $[0,1]$, on connaît l'inégalité $(t+\mathrm{N}+2k)^{-\alpha-1} \geqslant (t+\mathrm{N}+2k+1)^{-\alpha-1}$ (et $\alpha \geqslant 0$) donc

$$\alpha\int_0^1 (t+\mathrm{N}+2k)^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}t \geqslant \alpha\int_0^1 (t+\mathrm{N}+2k+1)^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{puis} \qquad u_{\mathrm{N}+2k}(\alpha)-u_{\mathrm{N}+2k+1}(\alpha) \geqslant u_{\mathrm{N}+2k+1}(\alpha)-u_{\mathrm{N}+2k+2}(\alpha),$$

ce qui donne $|\mathrm{R_N}(\alpha)| \geqslant |\mathrm{R_{N+1}}(\alpha)|$.

Étape 3. On encadre le reste. La décroissante de la suite $(|\mathrm{R_N}(\alpha))_{\mathrm{N}\geqslant 1}|$ donne les inégalités

$$2|\mathrm{R_N}(\alpha)| \leqslant |\mathrm{R_N}(\alpha)| + |\mathrm{R_{N-1}}(\alpha)| = u_{\mathrm{N}-1}(\alpha) = \frac{1}{(\mathrm{N}-1)^\alpha} \qquad \text{et} \qquad 2|\mathrm{R_N}(\alpha)| \geqslant |\mathrm{R_N}(\alpha)| + |\mathrm{R_{N+1}}(\alpha)| = u_{\mathrm{N}}(\alpha) = \frac{1}{\mathrm{N}^\alpha}.$$

On en déduit l'encadrement

$$0 \leqslant |\mathrm{R_N}(\alpha)| - \frac{1}{2\,\mathrm{N}^\alpha} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(\mathrm{N}-1)^\alpha} - \frac{1}{\mathrm{N}^\alpha}\right).$$

Une écriture intégrale donne alors de nouveau

$$\frac{1}{(\mathrm{N}-1)^\alpha} - \frac{1}{\mathrm{N}^\alpha} = \alpha\int_0^1 (\mathrm{N}-1+t)^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}t \leqslant \alpha\int_0^1 (\mathrm{N}-1)^{-\alpha-1}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\alpha}{(\mathrm{N}-1)^{-\alpha-1}}$$

et on en déduit la relation $|\mathrm{R_N}(\alpha)| = \dfrac{1}{2\,\mathrm{N}^\alpha} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{\mathrm{N}^{\alpha+1}}\right)$. En multipliant par $(-1)^{\mathrm{N}}$, il vient finalement

$$\mathrm{R_N}(\alpha) = \frac{(-1)^{\mathrm{N}}}{2\,\mathrm{N}^\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\mathrm{N}^{\alpha+1}}\right).$$

4.4 Complément : calcul de la somme

Dans cette section, on prouve l'égalité $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = -\ln(2)$.

Première méthode. La première méthode repose sur l'astuce $\dfrac{1}{n} = \displaystyle\int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t$. Prenons un entier $\mathrm{N} \geqslant 1$.

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (-1)^n \int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} (-1)^n t^{n-1}\right)\,\mathrm{d}t.$$

Dans l'intégrale, on reconnaît une somme géométrique finie. Sa raison vaut $-t$, ce qui est différent de 1. On peut donc appliquer la formule classique.

$$\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^n}{n} = \int_0^1 (-1)\times\frac{1-(-t)^{\mathrm{N}}}{1-(-t)}\,\mathrm{d}t = -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} + (-1)^{\mathrm{N}+1}\int_0^1 \frac{t^{\mathrm{N}}}{1+t}\,\mathrm{d}t = -\ln(2) + (-1)^{\mathrm{N}+1}\int_0^1 \frac{t^{\mathrm{N}}}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

L'encadrement $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{\mathrm{N}}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^{\mathrm{N}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\mathrm{N}+1}$ montre que le reste intégral tend vers 0 et que la somme vaut $-\ln(2)$. ♡

Deuxième méthode. Posons $\mathrm{S_N} = \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{(-1)^n}{n}$ et $\mathrm{H_N} = \sum\limits_{n=1}^{\mathrm{N}} \dfrac{1}{n}$. On trouve alors

$$\mathrm{S_{2N}} + \mathrm{H_{2N}} = \sum_{n=1}^{2\mathrm{N}} \frac{1+(-1)^n}{n}.$$

Dans cette somme, les termes d'indices impairs sont nuls. On garde uniquement les indices pairs, ce qui donne

$$\mathrm{S_{2N}} + \mathrm{H_{2N}} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{2}{2k} = \mathrm{H_N}.$$

On en déduit l'égalité

$$\mathrm{S}_{2\mathrm{N}} = -\mathrm{H}_{2\mathrm{N}} + \mathrm{H}_{\mathrm{N}} = -\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = -\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell+n} = -\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{\ell}{n}}.$$

On reconnaît la somme de Riemann d'ordre n de la fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur $[0,1]$. On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{\ell}{n}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(2).$$

On en déduit que $\mathrm{S}_{2\mathrm{N}}$ tend vers $-\ln(2)$ quand N tend vers $+\infty$, ce qui nous donne la valeur de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$. ♡

5 Produit de Cauchy

5.1 Produit de Cauchy de deux suites

Étant donné deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, leur *produit de Cauchy* est la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général

$$z_n = \sum_{k=0}^{n} x_k y_{n-k}.$$

Deux exemples seront vus au paragraphe 5.3.

5.2 Produit de deux sommes de séries absolument convergentes

Théorème. On considère deux séries complexes

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 0} b_n$$

et on supposent qu'elles convergent absolument.

On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le produit de Cauchy des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On peut alors affirmer que la série de terme général c_n est absolument convergente et que sa somme est donnée par la formule

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

5.3 Exemples

Exemple 1. Prenons x et y dans $\mathbb{C}$. Les séries exponentielles

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n\geqslant 0} \frac{y^n}{n!}$$

sont absolument convergentes donc on peut développer leur produit au moyen d'un produit de Cauchy.

Le produit de Cauchy des suites $(\frac{x^n}{n!})_{n\geqslant 0}$ et $(\frac{y^n}{n!})_{n\geqslant 0}$ a pour terme général

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \times \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

On en déduit la formule bien connue

$$\exp(x)\times\exp(y) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \exp(x+y).$$

Exemple 2. Prenons un nombre complexe z de module strictement inférieur à 1, de sorte que la série de terme général z^n converge absolument. On va élever sa somme au carré.

Le produit de Cauchy de la suite $(z^n)_{n\geqslant 0}$ avec elle-même a pour terme général

$$\sum_{k=0}^{n} z^k \times z^{n-k} = (n+1)z^n.$$

On obtient donc la formule

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n.$$

Exemple 3 (généralisation de l'exemple précédent). Prenons de nouveau un nombre complexe z de module strictement inférieur à 1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on va prouver l'énoncé (A_p) suivant : la série $\sum \binom{n+p}{p} z^n$ converge absolument et sa somme vaut

$$\frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+p}{p} z^n.$$

La propriété (A_0) est connue (séries géométriques). Prenons maintenant un entier p pour lequel la propriété (A_p) est vraie et prouvons (A_{p+1}).

Les séries $\sum z^n$ et $\sum \binom{n+p}{p} z^n$ convergent absolument donc on peut leur appliquer le théorème du produit de Cauchy. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} 1 \times \binom{k+p}{p}.$$

On peut alors affirmer que la série $\sum w_n z^n$ est absolument convergente et que sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n z^n = \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{(1-z)^{p+1}} = \frac{1}{(1-z)^{p+2}}.$$

Il reste à prouver l'égalité $w_n = \binom{n+p+1}{p+1}$. Cela peut se faire par un argument de dénombrement [3] ou par un télescopage basé sur l'identité du triangle de Pascal

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{k+p+1}{p+1} - \binom{k+p}{p+1} \right) = \binom{n+p+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+p+1}{p+1}.$$

On a alors démontré l'énoncé (A_{p+1}). Par récurrence, on a prouvé l'énoncé (A_p) pour tout entier p. ♡

5.4 Démonstration du théorème du produit de Cauchy

Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathrm{A_N} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} a_n, \quad \mathrm{B_N} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} b_n, \quad \mathrm{C_N} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} c_n.$$

Supposons dans un premier temps que les a_n et les b_n soient tous réels et positifs.

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$.

La somme $\mathrm{A_N B_N}$ est la somme des nombres $a_j b_k$ lorsque le couple (j,k) parcourt le carré $[\![0,\mathrm{N}]\!]^2$.

La somme $\mathrm{C_{2N}}$ est la somme des nombres $a_j b_k$ lorsque le couple (j,k) parcourt l'ensemble d'indices

$$\Gamma_{2\mathrm{N}} = \{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ j+k \leqslant 2\mathrm{N}\}.$$

La somme $\mathrm{A_{2N} B_{2N}}$ est la somme des nombres $a_j b_k$ lorsque le couple (j,k) parcourt le carré $[\![0,2\mathrm{N}]\!]^2$.

Les inégalités $j \leqslant \mathrm{N}$ et $k \leqslant \mathrm{N}$ impliquent $j+k \leqslant 2\mathrm{N}$ donc le carré $[\![0,\mathrm{N}]\!]^2$ est inclus dans le triangle $\Gamma_{2\mathrm{N}}$.

La somme $\mathrm{C_{2N}}$ comporte donc tous les termes de la somme $\mathrm{A_N B_N}$. Les autres termes sont positifs. On en déduit l'inégalité

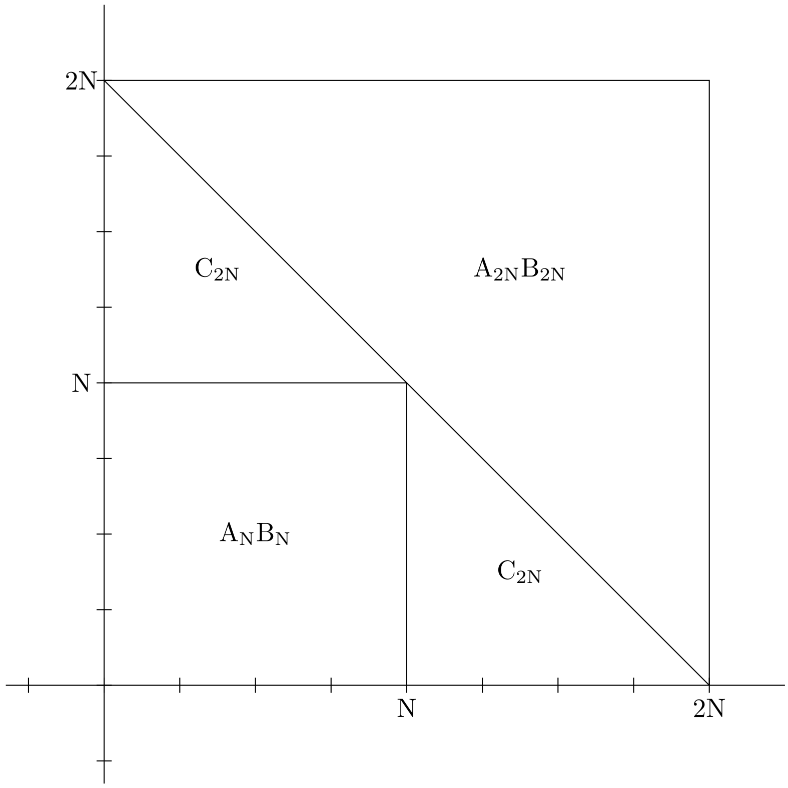
$$\mathrm{A_N B_N} \leqslant \mathrm{C_{2N}}.$$

De même, quand j et k sont des entiers positifs, la majoration $j+k \leqslant 2\mathrm{N}$ implique $j \leqslant 2\mathrm{N}$ et $k \leqslant 2\mathrm{N}$, donc le triangle $\Gamma_{2\mathrm{N}}$ est inclus dans le carré $[\![0,2\mathrm{N}]\!]^2$.

3. On trie les parties à $p+1$ éléments de $[\![0,n+p]\!]$ selon leur plus grand élément. On trouvera plus de détails dans mon poly sur le dénombrement.

La somme $A_{2N}B_{2N}$ comporte donc tous les termes de la somme C_{2N} plus éventuellement d'autres termes positifs. On en déduit l'inégalité

$$C_{2N} \leqslant A_{2N}B_{2N}.$$



Par encadrement, on en déduit que la suite $(C_{2N})_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers le nombre

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Comme les c_n sont positifs, on obtient ensuite l'encadrement

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad C_{2N} \leqslant C_{2N+1} \leqslant C_{2N+2},$$

qui montre que la suite $(C_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers cette même limite.

On en déduit finalement que la suite $(C_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge elle aussi vers cette limite. Autrement dit, la série de terme général c_n converge et sa somme est le produit des sommes des séries de termes généraux a_n et b_n.

On a alors prouvé le théorème dans le cas des séries à termes réels positifs.

Passons maintenant au cas général. Notons $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ le produit de Cauchy des suites $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, posons

$$D_N = \sum_{n=0}^{N} |a_n|, \quad E_N = \sum_{n=0}^{N} |b_n|, \quad F_N = \sum_{n=0}^{N} f_n.$$

L'inégalité triangulaire donne

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |c_n| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| \times |b_{n-k}| = f_n.$$

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le produit de Cauchy des suites $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(|b_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. Ces suites sont positives et elles définissent des séries convergentes. D'après 2.b, la série de terme général f_n converge.

D'après le critère de domination pour les séries à termes positifs, la série de terme général $|c_n|$ est convergente.

Autrement dit, la série de terme général c_n est absolument convergente.

Soit $N \in \mathbb{N}$. Introduisons à nouveau la notation

$$\Gamma_N = \{(j,k) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ j+k \leqslant N\}.$$

Par le même raisonnement que précédemment, le triangle Γ_N est inclus dans le carré $[\![0, N]\!]^2$.

La différence $A_N B_N - C_N$ est la somme des $a_j b_k$ lorsque le couple (j, k) parcourt l'ensemble d'indices $[\![0, N]\!]^2 \setminus \Gamma_N$.
La différence $D_N E_N - F_N$ est la somme des $|a_j| \times |b_k|$ lorsque le couple (j, k) parcourt l'ensemble d'indices $[\![0, N]\!]^2 \setminus \Gamma_N$.

L'inégalité triangulaire donne donc directement la majoration

$$|A_N B_N - C_N| \leqslant D_N E_N - F_N.$$

D'après le premier cas, le majorant $D_N E_N - F_N$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. On en déduit que $A_N B_N - C_N$ tend également vers 0, ce qui donne

$$\lim_{N \to +\infty} C_N = \left(\lim_{N \to +\infty} A_N \right) \times \left(\lim_{N \to +\infty} B_N \right),$$

c'est-à-dire

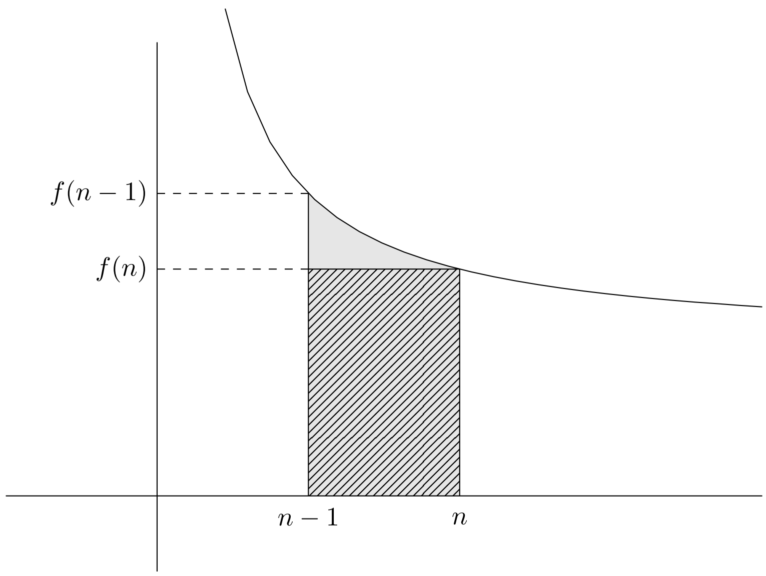
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right).$$

On a alors démontré le théorème du produit de Cauchy. ♡

6 Comparaison série-intégrale (méthode des rectangles)

6.1 Méthode générale

On considère une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ et on la suppose décroissante [4].



Comme l'illustre cette figure, si on prend un entier $n \geqslant a + 1$, le rectangle de base $[n - 1, n]$ et de hauteur $f(n)$ est inclus dans la région située entre l'axe des abscisses, le graphe de f et les droites verticales d'abscisses $n - 1$ et n. Cette inclusion donne l'inégalité suivante sur leurs aires

$$f(n) \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Prenons tout de même le temps de justifier cette inégalité de manière plus formelle.

Démonstration formelle de l'inégalité. Prenons un entier $n \geqslant a + 1$. La décroissance de la fonction f donne

$$\forall t \in [n - 1, n], \quad f(n) \leqslant f(t).$$

4. Ou croissante. Ça ne fait que renverser le sens des inégalités.

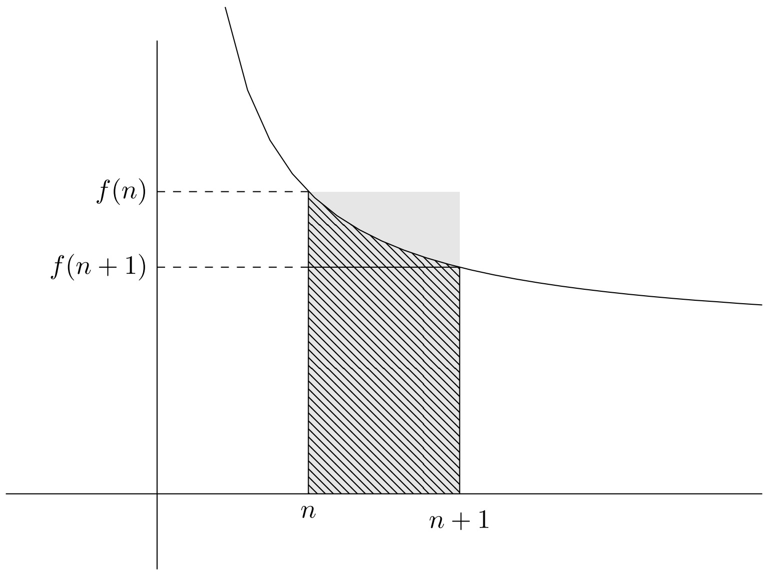
La croissante de l'intégrale donne ensuite

$$\int_{n-1}^{n} f(n)\ \mathrm{d}t \leqslant \int_{n-1}^{n} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

La première intégrale vaut $f(n)$ (l'intégrale d'une fonction constante sur un segment vaut la constante multipliée par la largeur du segment). L'inégalité est démontrée. ♡

De la même manière, pour tout entier $n \geqslant a$, on remarque que le rectangle de base $[n, n+1]$ et de hauteur $f(n)$ contient la région située entre l'axe des abscisses, le graphe de f et les droites verticales d'abscisses n et $n+1$. Cette inclusion donne l'inégalité suivante sur leurs aires

$$f(n) \geqslant \int_{n}^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t.$$



Ces inégalités étant établies, il reste à les utiliser. Un cadre classique est celui des fonctions de la forme $f_\alpha : t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ le nombre α étant une constante strictement positive. On se place alors sur l'intervalle $[1, +\infty[$.

On utilise alors la relation de Chasles pour encadrer l'intégrale $\displaystyle\int_1^n f_\alpha(t)\ \mathrm{d}t$

$$\int_1^n f_\alpha(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f_\alpha(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} f_\alpha(k)$$

et

$$\int_1^n f_\alpha(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f_\alpha(t)\ \mathrm{d}t \geqslant \sum_{k=2}^{n} f_\alpha(k).$$

On en déduit en particulier l'encadrement $\displaystyle f_\alpha(n) + \int_1^n f_\alpha(t)\ \mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} f_\alpha(k) \leqslant f_\alpha(1) + \int_1^n f_\alpha(t)\ \mathrm{d}t.$

L'intégrale $\displaystyle\int_1^n f_\alpha(t)\ \mathrm{d}t$ se calcule explicitement, ce qui donne un encadrement de la somme partielle, encadrement qui sera exploité dans les paragraphes ultérieurs.

6.2 Exercice résolu

Exercice atypique et néanmoins dans le thème : trouver la partie entière de $\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}$.

Les inégalités de la question précédente donnent

$$(10^9)^{-2/3}+\int_1^{10^9} t^{-2/3}\ \mathrm{d}t\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}\leqslant 1+\int_1^{10^9} t^{-2/3}\ \mathrm{d}t.$$

Le calcul intégral donne

$$\int_1^{10^9} t^{-2/3}\ \mathrm{d}t=\left[3\times t^{1/3}\right]_1^{10^9}=3\left(10^3-1\right)=2997.$$

Notre somme vérifie donc l'encadrement

$$2997.000001\leqslant\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}\leqslant 2998.$$

Cet encadrement n'est pas suffisant pour décider de la partie entière. Il reste à prouver que la majoration est stricte. Pour cela, il suffit d'avoir une inégalité stricte parmi toutes celles que l'on a ajoutées. Par exemple, on peut écrire

$$\int_1^2 t^{-2/3}\ \mathrm{d}t-2^{-2/3}=\int_1^2\left(t^{-2/3}-2^{-2/3}\right)\ \mathrm{d}t$$

et remarquer qu'on a là l'intégrale d'une fonction continue, positive, différente de la fonction nulle, si bien que cette différence est strictement positive. On en déduit finalement l'encadrement

$$2997.000001\leqslant\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}<2998$$

si bien que la partie entière de $\sum\limits_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}$ vaut 2997. ♡

6.3 Compliquons un peu les choses : une fonction unimodale

7 Les séries de Riemann

7.1 Le cas de divergence

Commençons par prouver la divergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$.

Première méthode. On utilise la méthode des rectangles, qui donne

$$\forall n\geqslant 1,\quad \frac{1}{n}\geqslant\int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t}=\ln(n+1)-\ln(n).$$

La suite $(\ln(n))_{n\geqslant 1}$ est divergente donc la série des différences $\sum\limits_{n\geqslant 1}(\ln(n+1)-\ln(n))$ est divergente.

Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ est divergente.

Deuxième méthode. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons $\mathrm{H}_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}$. Une minoration directe donne

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \mathrm{H}_{2n}-\mathrm{H}_n=\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k}\geqslant\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Cette minoration prouve que $\mathrm{H}_{2n}-\mathrm{H}_n$ ne peut pas tendre vers 0. La suite $(\mathrm{H}_n)_{n\geqslant 1}$ ne peut donc pas converger. La série de terme général $1/n$ est donc divergente. ♡

Cas général. Prenons α dans $]-\infty,1]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a alors

$$0\leqslant\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{n^\alpha}.$$

La série des $1/n$ diverge donc, par comparaison de séries à termes positifs, la série des $1/n^\alpha$ diverge. ♡

7.2 Le cas de convergence

Prenons α dans $]1,+\infty[$. La fonction $t \mapsto 1/t^\alpha$ est continue et décroissante sur $[1,+\infty[$. La méthode des rectangles donne donc

$$\forall n \geqslant 2, \quad 0 \leqslant \frac{1}{n^\alpha} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha}\right).$$

L'inégalité $1-\alpha < 0$ donne que la suite $(n^{1-\alpha})_{n\geqslant 1}$ converge vers 0. La série des différences

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - (n-1)^{1-\alpha}\right)$$

est donc convergente. Par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que la série des $1/n^\alpha$ converge. $\heartsuit$

7.3 Étude du reste dans le cas de convergence

Fixons $\alpha > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathrm{R}_n(\alpha) = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Dans ce paragraphe, on cherche à estimer ce reste.

Étant donné deux entiers p et n tels que $p > n$, la méthode des rectangles donne

$$\frac{1}{p^\alpha} - \frac{1}{n^\alpha} + \int_n^p \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_n^p \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{p^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha} + \frac{1}{1-\alpha}\left(p^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}\right) \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{1-\alpha}\left(p^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}\right).$$

En faisant tendre p vers $+\infty$, il reste

$$-\frac{1}{n^\alpha} + \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1} \leqslant \mathrm{R}_n(\alpha) \leqslant \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Ce raisonnement donne donc le développement asymptotique $\mathrm{R}_n(\alpha) = \dfrac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1} + \mathcal{O}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$.

On en déduit en particulier l'équivalent $\mathrm{R}_n(\alpha) \sim \dfrac{1}{\alpha-1} \times \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}$.

7.4 Les sommes harmoniques

Revenons sur la somme $\mathrm{H}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La méthode des rectangles donne l'encadrement

$$\frac{1}{n} + \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant \mathrm{H}_n \leqslant \ln(n) + 1.$$

On voit ainsi que H_n vaut $\ln(n)$ plus une quantité comprise entre 0 et 1. Étudions cet écart. On définit

$$u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n).$$

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on trouve

$$u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

On obtient en particulier la domination $u_n - u_{n-1} = \mathcal{O}(1/n^2)$. On en déduit que la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ est absolument convergente, donc convergente.

C'est la série des différences de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ donc cette suite converge. Sa limite est notée γ et elle est couramment appelée *constante d'Euler*[5].

5. Elle est parfois appelée *constante d'Euler-Mascheroni*.

7.5 Étude de la somme partielle dans le cas de divergence

Prenons cette fois α dans $]0,1[$. La méthode des rectangles du paragraphe 6 donne

$$\frac{1}{n^\alpha} + \int_1^n t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \int_1^n t^{-\alpha}\,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{n^\alpha} + \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant 1 + \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}.$$

On en déduit le développement asymptotique $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \mathcal{O}(1)$.

Exemple. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \mathcal{O}(1)$.

8 Études en tout genre

À faire. Du boulot en perspective.

9 Compléments

9.1 Amélioration de certains développements asymptotiques

On fixe $\alpha > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{R}_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Le but de ce paragraphe est d'obtenir le développement asymptotique

$$\mathrm{R}_n(\alpha) = \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha-1} - \frac{1}{2n^\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

Pour cela, commençons par définir la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{(1-\alpha)} \times t^{1-\alpha}$ sur $]0,+\infty[$.

Première étape. Pour tout entier $k \geqslant 2$, prouvons l'inégalité

$$0 \leqslant f(k+1) - f(k) - \frac{1}{k^\alpha} + \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{k^{\alpha+1}} \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}.$$

Pour cela, écrivons la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2

$$f(k+1) = f(k) + f'(k) \times 1 + \frac{f''(k)}{2} \times 1^2 + \int_k^{k+1} f'''(t)\frac{(k+1-t)^2}{2}\,\mathrm{d}t.$$

Les dérivées successives de f sont

$$f' : t \mapsto t^{-\alpha}, \qquad f'' : t \mapsto (-\alpha)t^{-\alpha-1}, \qquad f''' : t \mapsto \alpha(\alpha)t^{-\alpha-2}.$$

La formule de Taylor s'écrit donc

$$f(k+1) = f(k) + \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{k^{\alpha+1}} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout t dans le segment $[k,k+1]$, on écrit les encadrements « brutaux »

$$0 \leqslant (k+1-t)^2 \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \frac{1}{t^{\alpha+2}} \leqslant \frac{1}{k^{\alpha+2}}.$$

On en déduit l'encadrement suivant du reste intégral, en utilisant le fait que $\alpha(\alpha+1)$ est positif

$$0 \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^2}{t^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \int_k^{k+1} \frac{1}{k^{\alpha+2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \times \frac{1}{k^{\alpha+2}}.$$

Tout ceci donne l'encadrement attendu

$$\boxed{0 \leqslant f(k+1) - f(k) - \frac{1}{k^\alpha} + \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{k^{\alpha+1}} \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}.}$$

Deuxième étape. Sommons tout ceci.
Je fixe un entier $n \geqslant 2$ et un entier $\mathrm{N} \geqslant n$. L'inégalité de la première étape donne

$$0 \leqslant \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \left(f(k+1) - f(k) - \frac{1}{k^\alpha} + \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{k^{\alpha+1}} \right) \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^{\alpha+2}}.$$

On effectue le télescopage

$$0 \leqslant f(\mathrm{N}+1) - f(n) \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \left(-\frac{1}{k^\alpha} + \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{k^{\alpha+1}} \right) \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2} \sum_{k=n}^{\mathrm{N}} \frac{1}{k^{\alpha+2}}.$$

On fait tendre N vers $+\infty$.

$$0 \leqslant -\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^\alpha} - \mathrm{R}_n(\alpha) + \frac{\alpha}{2n^{\alpha+1}} + \frac{\alpha}{2}\mathrm{R}_n(\alpha+1) \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\mathrm{R}_{n-1}(\alpha+2).$$

On exploite maintenant les relations

$$\mathrm{R}_n(\alpha+1) = \frac{1}{\alpha n^\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{R}_{n-1}(\alpha+2) = \frac{1}{(\alpha+1)(n-1)^{\alpha+1}} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{(n-1)^{\alpha+2}}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right)$$

pour obtenir directement le développement asymptotique demandé

$$\mathrm{R}_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^\alpha} + \frac{\alpha}{2} \times \frac{1}{\alpha n^\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{2n^\alpha} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\right).$$

9.2 Transformation d'Abel

9.2.1 La formule

On considère deux suites complexes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Pour tout couple (r,s) d'entiers tels que $r+1 \leqslant s$, on a alors

$$\sum_{n=r+1}^{s} a_n b_n = \mathrm{A}_s b_s - \mathrm{A}_r b_r - \sum_{n=r}^{s-1} \mathrm{A}_n (b_{n+1} - b_n).$$

Cette formule ressemble à celle de l'intégration par parties, en ce sens que la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être vue comme primitive de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la suite $(b_{n+1}-b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être vue la dérivée de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

9.2.2 Démonstration de cette formule

Une possibilité est de procéder par récurrence, mais cela nécessite de connaître la formule *a priori*. Je préfère détailler la méthode qui mène à cette formule, pour les cas où on ne nous la donne pas en indication.

On part de la somme de gauche et on remarque la relation $a_n = \mathrm{A}_n - \mathrm{A}_{n-1}$, puis on fait apparaître un télescopage.

$$\sum_{n=r+1}^{s} a_n b_n = \sum_{n=r+1}^{s} (\mathrm{A}_n - \mathrm{A}_{n-1}) b_n = \sum_{n=r+1}^{s} (\mathrm{A}_n b_n - \mathrm{A}_{n-1} b_{n-1}) + \sum_{n=r+1}^{s} \mathrm{A}_{n-1}(b_{n-1} - b_n).$$

Il n'y a plus qu'à effectuer le télescopage dans la première somme et à décaler l'indice dans la deuxième somme en posant $k = n-1$.

$$\sum_{n=r+1}^{s} a_n b_n = (\mathrm{A}_s b_s - \mathrm{A}_r b_r) + \sum_{k=r}^{s-1} \mathrm{A}_k (b_k - b_{k+1}) = \mathrm{A}_s b_s - \mathrm{A}_r b_r - \sum_{k=r}^{s-1} \mathrm{A}_k (b_{k+1} - b_k).$$

La formule d'Abel est démontrée. ♡

9.2.3 Première utilisation : un théorème d'Abel

Théorème (Abel). On reprend les notations du paragraphe précédent. On suppose que la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle décroissante, de limite nulle.

Alors la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ est convergente. ♣

Démonstration du théorème. Considérons un majorant M de la suite $(|\mathrm{A}_n|)_{n\in\mathbb{N}}$.

La formule dite *transformation d'Abel* donne

$$\forall s \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{n=1}^{s} a_n b_n = \mathrm{A}_s b_s - \mathrm{A}_0 b_0 + \sum_{k=0}^{s-1} \mathrm{A}_k (b_k - b_{k+1}).$$

La suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 donc le produit $\mathrm{A}_s b_s$ tend vers 0 quand s tend vers $+\infty$. D'autre part, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on connaît la majoration

$$|\mathrm{A}_k (b_k - b_{k+1})| \leqslant \mathrm{M} \times \underbrace{(b_k - b_{k+1})}_{\text{positif par hypothèse}}.$$

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente donc la série des différences $\sum (b_k - b_{k+1})$ est convergente. Par domination, on en déduit que la série de terme général $\mathrm{A}_k (b_k - b_{k+1})$ est absolument convergente, donc convergente.

On a alors démontré que la somme partielle $\sum_{n=1}^{s} a_n b_n$ tend vers la constante

$$-\mathrm{A}_0 b_0 + \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}_k (b_k - b_{k+1})$$

quand s tend vers $+\infty$. La série $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ est donc convergente. ♡

9.2.4 Cas particulier important du théorème d'Abel

Propriété. Soit $\theta \in]0, 2\pi[$.

Alors, en posant $a_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, la suite de terme général $\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ est bornée.

En particulier, pour toute suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante de limite nulle, la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\, b_n$ est convergente.

En particulier, pour tout $\alpha \in]0, +\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{n^\alpha}$ est convergente. ♣

Avant de procéder à la démonstration, remarquons deux faits. Le premier est que le cas $\theta = \pi$ redonne le premier point du théorème des séries alternées. Le deuxième est que dans la cas $\alpha > 1$, il n'y a pas besoin du théorème d'Abel puisque la série proposée converge absolument.

Démonstration de la propriété. Le choix de θ fait que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ est différent de 1. Il est donc possible d'utiliser la formule des sommes géométriques finies.

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \frac{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \qquad \text{donc} \qquad |\mathrm{A}_n| \leqslant \frac{2}{|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}|}.$$

On a alors prouvé que la suite $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. ♡

9.2.5 Deuxième utilisation : une formule pour l'espérance

Théorème. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive et décroissante. Les deux propriétés qui suivent sont alors équivalentes.

(i) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} b_n$ est convergente.

(ii) La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(b_n - b_{n+1})$ est convergente et le produit nb_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

De plus, si ces conditions sont vérifiées, alors on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} n(b_n - b_{n+1})$. ♣

Démonstration du théorème. Prenons N dans $\mathbb{N}^*$. La transformation d'Abel donne alors

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} n(b_n - b_{n+1}) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}-1} b_n - (\mathrm{N}-1)b_{\mathrm{N}}.$$

On en déduit directement que l'hypothèse **(ii)** implique l'hypothèse **(i)**.

Réciproquement, faisons l'hypothèse **(i)**. On obtient alors pour tout $\mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$ l'inégalité

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} n(b_n - b_{n+1}) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

La suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(b_n - b_{n+1})$ est donc majorée. Cette suite étant croissante, on en déduit qu'elle converge. Cette série est donc convergente.

La formule issue de la transformation d'Abel permet alors de conclure que $(\mathrm{N}-1)b_{\mathrm{N}}$ tend vers

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n - \sum_{n=0}^{+\infty} n(b_n - b_{n+1})$$

quand N tend vers $+\infty$. Notons ℓ cette limite. Si on suppose que cette limite est non nulle, alors b_{N} est équivalent à ℓ/N quand N tend vers $+\infty$, mais cela contredit la convergence de la série de terme général b_{N}. Celle limite est donc nulle et on a prouvé que **(i)** implique **(ii)**.

Enfin, sous l'une ou l'autre hypothèse, le passage à la limite dans la formule issue de la transformation d'Abel donne l'égalité annoncée entre les sommes. ♡

Corollaire. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Alors l'espérance de X existe si, et seulement si, la série de terme général $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant n)$ est convergente. De plus, si c'est le cas, alors l'espérance de X est donnée par

$$\mathbb{E}(\mathrm{X}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant n).$$

Démonstration du corollaire. On pose $b_n = \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant n)$, ce qui donne $n(b_n - b_{n+1}) = n\,\mathbb{P}(\mathrm{X} = n)$.

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien positive et décroissante.

Commençons par supposer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant n)$ converge. C'est alors l'hypothèse **(i)** du théorème ci-dessus. On en déduit la propriété `(ii)`, qui donne en particulier l'existence de l'espérance de X. On en déduit également la nouvelle expression de l'espérance de X.

Supposons maintenant que l'espérance de X existe, ce qui donne la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n(b_n - b_{n+1})$. Il reste alors à prouver que nb_n tend vers 0.

Prenons un entier N strictement positif et remarquons les inégalités

$$\sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} n\mathbb{P}(\mathrm{X} = n) \geqslant \mathrm{N} \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{X} = n) = \mathrm{N}\ \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant \mathrm{N}) \geqslant 0.$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $\mathrm{N} \times \mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant \mathrm{N})$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. L'hypothèse **(ii)** est donc vérifiée, ce qui permet d'en déduire **(i)**. La démonstration du corollaire est terminée. ♡

9.3 Réarrangement des séries absolument convergentes

Dans cette partie, on démontre le théorème suivant.

Théorème de réarrangement des séries absolument convergentes. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose que la série $\sum z_n$ est absolument convergente.

Alors, pour toute bijection φ de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$, la série $\sum z_{\varphi(n)}$ est absolument convergente et elle a la même somme que la série $\sum z_n$. ♣

Démonstration du théorème de réarrangement. Posons $\mathrm{S} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_n$.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection.

Soit $\varepsilon > 0$. La suite des restes de la série $\sum |z_k|$ converge vers 0 donc il existe un entier n_0 tel que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} |z_k| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $n_1 = \max(\varphi^{-1}(0), \dots, \varphi^{-1}(n_0))$. On a alors l'inclusion $\varphi^{-1}([\![0, n_0]\!]) \subset [\![0, n_1]\!]$ donc

$$[\![0, n_0]\!] \subset \{\varphi(0), \dots, \varphi(n_1)\}.$$

Soit un entier $n \geqslant n_1$. Parmi les entiers $\varphi(0), \dots, \varphi(n)$, on sait qu'il se trouve les entiers de 0 à n_0. Notons les autres entiers

$$m_{n_0+1}, \dots, m_n$$

dans un ordre quelconque. Ce qui importe, c'est que ces entiers sont forcément strictement supérieurs à n_0. On obtient alors

$$\mathrm{S} - \sum_{k=0}^{n} z_{\varphi(k)} = \mathrm{S} - \sum_{j=0}^{n_0} z_j - \sum_{i=n_0+1}^{n} z_{m_i} = \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} z_j - \sum_{i=n_0+1}^{n} z_{m_i}.$$

L'inégalité triangulaire donne ensuite

$$\left| \mathrm{S} - \sum_{k=0}^{n} z_{\varphi(k)} \right| \leqslant \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} |z_j| + \sum_{i=n_0+1}^{n} |z_{m_i}|.$$

Les m_i sont des entiers distincts strictement supérieurs à n_0 donc

$$\sum_{i=n_0+1}^{n} |z_{m_i}| \leqslant \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} |z_j|.$$

On obtient donc

$$\left| \mathrm{S} - \sum_{k=0}^{n} z_{\varphi(k)} \right| \leqslant 2 \times \sum_{j=n_0+1}^{+\infty} |z_j| \leqslant \varepsilon$$

d'après l'inégalité de la première question.

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_1 \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_1, \qquad \left| \mathrm{S} - \sum_{k=0}^{n} z_{\varphi(k)} \right| \leqslant \varepsilon.$$

On a donc prouvé que la série de terme général $z_{\varphi(k)}$ est convergente et que sa somme vaut S. ♡

Ce théorème justifie bon nombre de conventions du cours de probabilités de deuxième année, notamment le fait que l'espérance d'une variable aléatoire ne dépende pas de la numérotation des éléments.

9.4 Familles sommables

On considère un ensemble infini E. On note $\mathcal{P}^*(\mathrm{E})$ l'ensemble de ses parties *finies*. On considère une famille $z = (z_e)_{e\in\mathrm{E}}$ de nombres complexes indexée par l'ensemble E.

Définition. Dire que la famille z est *sommable* signifie que l'ensemble

$$\left\{\sum_{e\in\mathrm{J}} |z_e| \ ; \ \mathrm{J} \in \mathcal{P}^*(\mathrm{E})\right\}$$

est majoré.

La borne supérieure de cet ensemble sera notée $||z||_1$ dans la suite.

Exemple. Considérons une suite complexe $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si la série $\sum |z_n|$ est convergente, alors la famille z est sommable et $||z||_1$ est la somme de cette série.

On va voir dans ce qui suit que les familles sommables se ramènent toutes à des séries absolument convergentes.

Définition. Le *support* de la famille z est l'ensemble des indices e de E tels que $z_e \neq 0$.

Proposition. Si la famille z est sommable, alors son support est fini ou dénombrable.

Démonstration de la proposition. On suppose que la famille z est sommable. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, considérons l'ensemble

$$\mathrm{Z}_n = \left\{e \in \mathrm{E} \ ; \ |z_e| \geqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

Pour toute partie J finie incluse dans Z_n, on a

$$\sum_{e\in\mathrm{J}} |z_e| \geqslant \frac{|\mathrm{J}|}{n} \qquad \text{et} \qquad \sum_{e\in\mathrm{J}} |z_e| \leqslant ||z||_1 \qquad \text{donc} \qquad |\mathrm{J}| \leqslant n \times ||z||_1.$$

L'ensemble Z_n ne contient pas de partie de cardinal strictement plus grand que $n \times ||z||_1$ donc l'ensemble Z_n est un ensemble fini.

Le support de la famille z est la réunion des Z_n quand n décrit $\mathbb{N}^*$. C'est donc une réunion dénombrable d'ensembles finis. Cet ensemble est donc fini ou dénombrable. ♡

Une conséquence de cette proposition est qu'on peut se limiter au cas où l'ensemble E est dénombrable, puisque les indices hors du support de z n'ont aucune contribution. On suppose donc dans tout ce qui suit que l'ensemble E est dénombrable.

Théorème-définition. Soit $z = (z_e)_{e\in\mathrm{E}}$ une famille sommable. Alors, pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathrm{E}$, la série $\sum z_{\varphi(n)}$ est absolument convergente. De plus, sa somme ne dépend pas du choix de la bijection φ.

Le nombre $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z_{\varphi(n)}$ est noté $\sum\limits_{e\in\mathrm{E}} z_e$. C'est la *somme* de la famille sommable $(z_e)_{e\in\mathrm{E}}$. ♣

Tout ceci découle directement du théorème de réarrangement du paragraphe 9.3.

9.5 Séries doubles

9.5.1 Petit théorème de Fubini

Dans ce paragraphe, on se limite aux séries doubles qui convergent absolument.

À faire.

9.5.2 Exemples plus délicats avec des séries alternées

Pour tout $\alpha > 0$, on sait que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente par le théorème des séries alternées. On peut donc poser

$$\forall \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{R_N}(\alpha) = \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}.$$

On va prouver dans ce paragraphe que la série $\sum_{\mathrm{N}\geqslant 0} \mathrm{R_N}(\alpha)$ est convergente, ce qui permet de considérer la somme double infinie

$$\sum_{\mathrm{N}=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha} \right)$$

alors que cette double somme est inaccessible au paragraphe précédent si $\alpha \leqslant 2$.

Pour cela, on va utiliser le théorème des séries alternées. Remarquons pour commencer que $\mathrm{R_N}(\alpha)$ a le même signe que $(-1)^{\mathrm{N}+1}$ d'après ce même théorème, ce qui donne $\mathrm{R_N}(\alpha) = (-1)^{\mathrm{N}+1}|\mathrm{R_N}(\alpha)|$.
On sait par ailleurs que $\mathrm{R_N}(\alpha)$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$ (suite des restes d'une série convergente).
Il reste donc simplement à prouver que la suite $(|\mathrm{R_N}(\alpha)|)_{\mathrm{N}\geqslant 0}$ est décroissante.

Soit $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$. La technique de réécriture du paragraphe 4.2 donne

$$|\mathrm{R_N}(\alpha)| = (-1)^{\mathrm{N}+1}\mathrm{R_N}(\alpha) = \sum_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\mathrm{N}+1+n}}{n^\alpha} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\underbrace{\frac{1}{(\mathrm{N}+1+2k)^\alpha} - \frac{1}{(\mathrm{N}+1+2k+1)^\alpha}}_{\text{noté } \delta(\mathrm{N},k)} \right).$$

Fixons un entier k et observons l'égalité

$$\delta(\mathrm{N}, k) = \left[-(\mathrm{N}+1+2k+t)^{-\alpha} \right]_0^1 = \alpha \int_0^1 (\mathrm{N}+1+2k+t)^{-\alpha-1}\, \mathrm{d}t.$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on connaît l'inégalité $(\mathrm{N}+2+2k+t)^{-\alpha-1} \leqslant (\mathrm{N}+1+2k+t)^{-\alpha-1}$. Par croissance de l'intégrale, on obtient $\delta(\mathrm{N}+1,k) \leqslant \delta(\mathrm{N},k)$.

Cette inégalité est valable pour tout N dans $\mathbb{N}$, donc, par sommation, on obtient $|\mathrm{R_{N+1}}(\alpha)| \leqslant |\mathrm{R_N}(\alpha)|$.

Le théorème des séries alternées permet de conclure que la série $\sum \mathrm{R_N}(\alpha)$ est convergente.

À compléter : se référer à `DS02_1718`.

9.6 Suites semi-convergentes

Théorème de réarrangement.

À faire.

10 Quelques exercices classiques

10.1 Théorème de Raabe-Duhamel

Au paragraphe 2.1.4, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à terme strictement positifs pour laquelle le quotient u_{n+1}/u_n possède une limite ℓ quand n tend vers $+\infty$. La règle de d'Alembert ne permet pas de conclure dans le cas où cette limite vaut 1 car toutes les séries de Riemann sont dans ce cas. Creusons un peu ce quotient dans le cas des séries de Riemann.
Fixons un $\alpha > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = 1/n^\alpha$. On trouve alors

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1} \right)^\alpha = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2} \right).$$

Le théorème qui suit est une sorte de réciproque de ce calcul.

Théorème de Raabe-Duhamel. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe une constante $\alpha > 0$ tel que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Alors il existe $\mathrm{C} > 0$ tel que v_n soit équivalent à C/n^α.
En particulier, la série $\sum v_n$ converge si et seulement si $\alpha > 1$. ♣

Démonstration du théorème de Raabe-Duhamel. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $w_n = \ln(v_n/u_n)$. Un développement limité donne

$$w_{n+1} - w_n = \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right) - \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

La série des différences $\sum(w_{n+1} - w_n)$ est donc absolument convergente. On en déduit qu'elle converge. On en déduit que la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. En notant ℓ sa limite, la continuité de l'exponentielle donne que v_n/u_n tend vers e^ℓ, ce qui est une constante strictement positive, et finalement v_n est équivalent à e^ℓ/n^α ♡

10.2 Sinus et cosinus bizarres

$\sum \sin(\pi\sqrt{n^2+2n})$
$\sum \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$
$\sum \sin(n!\mathrm{e}\pi)$

10.3 À caser quelque part

Si u_n (strictement positif) tend vers 0 et $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \frac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ est divergente et $\sum \frac{u_n}{\mathrm{S}_n^2}$ est convergente.