Compte rendu du devoir en temps libre n° 3

Problème 1

Question 3. Invoquer la concavité du logarithme, c'est bien. Justifier cette concavité, c'est encore mieux.

Question 4. Avant de diviser par $||x||_p$ et par $||y||_q$, il faut supposer que les vecteurs x et y sont non nuls.

Question 5.a. Lorsque x et y sont des vecteurs, la notation $(x+y)^{p-1}$ n'a aucun sens.

Lorsque x_k et y_k sont des nombres, la notation $(x_k+y_k)^{p-1}$ peut avoir un sens mais ce n'est pas le cas si $x_k+y_k<0$.

Question 5.c. Comme à la question 4, avant de diviser par $||x+y||_p$, il faut supposer que le vecteur $x+y$ n'est pas nul.

Question 6. Pour justifier que la série $\sum_{k\geqslant 0} |u_k+\lambda v_k|^p$ converge, beaucoup appliquent l'inégalité de Minkowski sur les sommes partielles, ce qui est une bonne idée. Cependant, l'argument employé pour conclure est presque toujours « par domination », ce qui est inadapté. En effet, le critère de domination est une méthode qui consiste à majorer le *terme général*, pas les sommes partielles.

Autre méthode. Posons $w_k = \max(|u_k|, |v_k|)$. On a alors

$$|u_k+\lambda v_k| \leqslant (1+|\lambda|)w_k \quad \text{puis} \quad |u_k+\lambda v_k|^p \leqslant (1+|\lambda|)^p w_k^p \leqslant (1+|\lambda|)^p(|u_k|^p+|v_k|^p).$$

Le critère de domination permet alors de conclure que la série de terme général $|u_k+\lambda v_k|^p$ est convergente.

Problème 2

Questions 11, 12 et 13. La positivité des coefficients est parfois oubliée.
Pour vérifier la condition (2), presque personne n'utilise la simplification offerte par la question 10.

Question 13. Les notations utilisées pour les coefficients de la matrice A_p sont souvent très bizarres, alors que la notation $(\mathrm{A}_p)_{i,j}$ est standard.

Problème 3

Question 29. Le recours au théorème des valeurs intermédiaires est généralement correct.

L'inégalité $f(x_k) \leqslant f(x_{k+1})$ et la croissance de f ne permettent pas d'en déduire l'inégalité $x_k \leqslant x_{k+1}$.

Dans la définition d'une fonction croissante, l'hypothèse $x \leqslant y$ implique $f(x) \leqslant f(y)$. Par contraposition, l'hypothèse $f(x) > f(y)$ implique $x > y$.

Ainsi, c'est en remarquant l'inégalité $f(x_{k+1}) > f(x_k)$ que la croissance de f permet d'obtenir $x_{k+1} > x_k$.
