

Chapitre 11 — intégrales dépendant d'un paramètre

1 Rappel : théorème de convergence dominée

Soit $(f_n)_{n \geq n_0}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I . On fait les hypothèses suivantes.

1. La suite de fonctions $(f_n)_{n \geq n_0}$ converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux.
2. Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I (et indépendante du paramètre n) vérifiant la domination

$$\forall n \geq n_0, \quad \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leq \varphi(t).$$

On peut alors affirmer que les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I et que la suite de terme général $\int_I f_n$ converge vers $\int_I f$ (on peut passer à la limite sous l'intégrale).

2 Théorème de continuité sous l'intégrale

Soient A et I deux intervalles (l'intervalle A est l'ensemble des paramètres; l'intervalle I est celui sur lequel on intègre). Soit f une fonction définie sur $A \times I$. On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout t dans I , la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur A .
2. Pour toute valeur du paramètre x dans A , la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
3. Il existe une fonction φ intégrable sur I et indépendante du paramètre x vérifiant la domination

$$\forall x \in A, \quad \forall t \in I, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors on peut affirmer que la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est (définie et) continue sur A .

Version assouplie : on peut se contenter de prouver que F est et continue sur chaque segment inclus dans A .

Exemple : la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est continue sur $]0, +\infty[$.

3 Théorème de convergence dominée à paramètre continu

Soient A et I deux intervalles de \mathbb{R} . Soit a une borne de A . Soit f une fonction définie sur $A \times I$. Soit ℓ une fonction continue par morceaux sur I .

On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout t dans I , $f(x, t)$ tend vers $\ell(t)$ quand x tend vers a .
2. Pour toute valeur du paramètre x dans A , la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I .
3. Il existe une fonction φ intégrable sur I et indépendante du paramètre x vérifiant la domination

$$\forall x \in A, \quad \forall t \in I, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction ℓ est intégrable sur I et $\int_I f(x, t) dt$ tend vers $\int_I \ell(t) dt$ quand x tend vers a .

Exemple (question 1 du sujet X-ENS PC 2014) : montrer que $\int_0^d x e^{-tx} g(t) dt$ tend vers $g(0)$ quand x tend vers $+\infty$.

4 Théorème de dérivation sous l'intégrale

Soit f une fonction définie sur $A \times I$. On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour toute valeur du paramètre x dans A , la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle I .
2. Pour tout t dans I , la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle A .
3. Pour tout x dans A , la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue par morceaux sur l'intervalle I .
4. Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle I (et indépendante du paramètre x) vérifiant la domination

$$\forall x \in A, \quad \forall t \in I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur l'intervalle A et sa dérivée s'obtient en dérivant sous l'intégrale

$$\forall x \in A, \quad F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) dt.$$

Version assouplie : on peut se contenter de montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 sur tout segment K inclus dans I .

Généralisation aux fonctions de classe \mathcal{C}^k . Exemple de la fonction Γ (méthode par récurrence).

5 Théorème de dérivation sous l'intégrale, version étendue

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit f une fonction définie sur $A \times I$. On fait les hypothèses suivantes.

1. Pour tout t dans I , la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est de classe \mathcal{C}^k sur l'intervalle A .
2. Pour toute valeur du paramètre x dans A , pour tout $j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t)$ est continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle I .
3. Pour tout x dans A , la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t)$ est continue par morceaux sur l'intervalle I .
4. Il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur l'intervalle I (et indépendante du paramètre x) vérifiant la domination

$$\forall x \in A, \quad \forall t \in I, \quad \left| \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \varphi(t).$$

Alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x, t) dt$ est de classe \mathcal{C}^k sur l'intervalle A et ses k premières dérivées s'obtiennent en dérivant sous l'intégrale

$$\forall j \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad \forall x \in A, \quad F^{(j)}(x) = \int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x, t) dt.$$

Programme de colles n° 9 (du lundi 22 janvier au vendredi 2 février 2024)

Tout ce chapitre. Il n'est pas interdit de revenir aussi sur le théorème de convergence dominée et les théorèmes d'intégration terme à terme.