

Chapitre 12 — dénombrabilité et sommabilité

1 Ensembles dénombrables

1.1 Définition et exemples

Définition d'un ensemble dénombrable : c'est un ensemble en bijection avec \mathbb{N} .

Exemples : l'ensemble \mathbb{Z} , l'ensemble des nombres pairs, toute partie infinie de \mathbb{N} .

Tout ensemble infini qui s'injecte dans \mathbb{N} est dénombrable. Exemples : les ensembles \mathbb{N}^k et \mathbb{Q} .

Tout produit fini d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

Toute union finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est un ensemble fini ou dénombrable.

1.2 Exemples d'ensembles non dénombrables

L'ensemble $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des parties de \mathbb{N} , l'ensemble \mathbb{R} .

2 Familles sommables

2.1 Somme d'une famille de nombres positifs

Étant donné une famille $x = (x_i)_{i \in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$, on note

$$\sum_{i \in I} x_i$$

la borne supérieure de l'ensemble $\left\{ \sum_{j \in J} x_j ; J \in \mathcal{P}_f(I) \right\}$, où $\mathcal{P}_f(I)$ désigne l'ensemble des parties finies de I .

C'est un élément de $[0, +\infty]$.

Le *support* de la famille x est l'ensemble $\{i \in I ; x_i > 0\}$.

Pour que la somme $\sum_{i \in I} x_i$ soit finie, il est nécessaire que le support de x soit fini ou dénombrable.

Pour cette raison, on suppose dans la suite que I est un ensemble fini et dénombrable.

Théorème admis : étant donné une énumération $\{\varphi(n) ; n \in \mathbb{N}\}$ de I , la somme $\sum_{i \in I} x_i$ est finie si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} x_{\varphi(n)}$ converge, auquel cas on a l'égalité

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\varphi(n)}.$$

En particulier, la somme de cette série ne dépend pas du choix de l'énumération φ de I .

Contre-exemple dans le cas semi-convergent : la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Sommation par paquets : pour toute décomposition $I = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_n$ comme union disjointe dénombrable, on a l'égalité

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right).$$

Cas particuliers importants

$$\sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{i=0}^{+\infty} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} \right) \quad \text{et} \quad \sum_{(i,j) \in \mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_{k,n-k} \right).$$

Produit de deux sommes. Produit de Cauchy. Sommes indexées par \mathbb{Z} .

2.2 Sommabilité d'une famille de nombres complexes

Dire qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ de nombres complexes est *sommable* signifie que $\sum_{i \in I} |x_i| < +\infty$.

Soit $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow I$ une énumération.

Théorème admis : la famille $(x_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} x_{\varphi(n)}$ converge absolument.

La somme de cette série ne dépend donc pas du choix de φ et on la note $\sum_{i \in I} x_i$. C'est la *somme* de la famille $(x_i)_{i \in I}$.

Dans ce cas, on a de plus l'inégalité triangulaire

$$\left| \sum_{i \in I} x_i \right| \leq \sum_{i \in I} |x_i|.$$

Critère de domination : si pour tout $i \in I$, on a la majoration $|x_i| \leq y_i$, alors la sommabilité de la famille $(y_i)_{i \in I}$ implique celle de la famille $(x_i)_{i \in I}$.

Linéarité, croissance, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes, produit de Cauchy.

Exercice 1. (*) Soit $p \in]0, 1[$. Soit $\lambda > 0$. Pour tout $(n, k) \in \mathbb{N}^2$, on pose

$$u_{n,k} = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}.$$

Calculer la somme de la famille $(u_{n,k})_{(n,k) \in \mathbb{N}^2}$.

Exercice 2. (*) Soit $\alpha > 1$.

Étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{(i+j)^\alpha} \right)_{(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ et calculer sa somme à l'aide de la fonction ζ .

Pour cela, on regroupera les couples (i, j) par paquets dans lesquels $i + j$ est une constante.

Exercice 3. (*) Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(2^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{4^k}{k!} \right)$.

Exercice 4. (*) On considère la famille $(b_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ de terme général $b_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j \\ -1 & \text{si } i = j \\ 1/2^{j-i} & \text{si } i < j. \end{cases}$

Vérifier que les sommes doubles $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} b_{i,j}$ et $\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} b_{i,j}$ existent et calculer leurs valeurs.

La famille $(b_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

Exercice 5. ()** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Montrer que la famille $(z^{ab})_{(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable et trouver une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendante de z telle que

$$\sum_{(a,b) \in (\mathbb{N}^*)^2} z^{ab} = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n z^n.$$

Exercice 6. ()** Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$.

Trouver une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ indépendante de z telle que

$$\frac{1}{1-z^2} \times \frac{1}{1-z^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^n.$$