Exercice 1. (*) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose $g(x) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $g(0) = f'(0)$.

Vérifier l'égalité $\displaystyle\int_0^1 f'(xt)\ \mathrm{d}t = g(x)$ pour tout x réel. En déduire que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. (*) Pour tout x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

a. Dériver la fonction f. En déduire une relation entre f et g.

b. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

Exercice 3. (**) On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(tx)}{t(1+t^2)}\ \mathrm{d}t$ quand c'est possible.

a. Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c. Exprimer $\mathrm{F}'(x)$ pour tout x dans $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ puis pour tout $x \in [0, +\infty[$.

d. Obtenir finalement une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour tout x réel.

Exercice 4. (*) Pour tout $(a, b) \in (]0, +\infty[)^2$, montrer l'existence de l'intégrale.

$$\mathrm{I}(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at} - \mathrm{e}^{-bt}}{t}\ \mathrm{d}t.$$

Calculer cette intégrale. Pour cela, on pourra fixer a et dériver par rapport à b.

Exercice 5. (**) On pose $\mathrm{J}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}tx}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$ quand c'est possible.

a. Montrer que la fonction J est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par J puis trouver une expression simple de $\mathrm{J}(x)$.

Exercice 6. (**) $\boxed{\textbf{Intégrale de Fresnel complexe}}$

1. On considère un élément z de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On pose $a = \operatorname{Re}(z)$ et $b = \operatorname{Im}(z)$.

1.a. Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t - z}$.

1.b. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - z^2}$ et préciser sa valeur.

2. Pour tout x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2(\mathrm{i}+t^2)}}{\mathrm{i}+t^2}\ \mathrm{d}t$.

2.a. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2.b. Calculer $f(0)$ et montrer que la fonction f tend vers 0 en $+\infty$.

2.c. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer sa dérivée.

2.d. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t^2}\ \mathrm{d}t$ existe et préciser sa valeur.
