Exercice 1. **(*)** Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ dans les cas suivants

$$a_n = \frac{n^n}{n!} \quad ; \quad a_n = (\sqrt{n})^{-\sqrt{n}} \quad ; \quad a_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(\ln(n))} \quad ; \quad a_n = \exp(n^\alpha) \quad ; \quad a_n = \mathrm{e}^{(n+1)^2} - \mathrm{e}^{(n-1)^2} \quad ; \quad a_n = n^{(-1)^n}.$$

Exercice 2. **(*)** Prouver l'égalité $\mathrm{rayon}(\sum u_n z^n) = \min(\mathrm{rayon}(\sum u_{2p} z^{2p}), \mathrm{rayon}(\sum u_{2p+1} z^{2p+1}))$.

Exercice 3. **(*)** On fixe a et b dans $\mathbb{R}$ avec $0 < a < b$. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, on pose

$$c_{2p} = a^p \qquad \text{et} \qquad c_{2p+1} = b^p.$$

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ puis exprimer sa somme.

Exercice 4. **(*)** Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $\pi(n)$ le nombre de nombres premiers dans l'intervalle $[\![1, n]\!]$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \sqrt{\pi(n)}\, z^n$.

Exercice 5. **(**)** On pose $\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Encadrer H_n entre deux puissances de n et en déduire le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{H}_n\, x^n$.

b. En reconnaissant un produit de Cauchy, exprimer sa somme sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

c. On rappelle que la suite de terme général $\gamma_n = \mathrm{H}_n - \ln(n)$ possède une limite finie, notée γ. En déduire un équivalent de $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln(n)\, x^n$ quand x tend vers 1.

Exercice 6. **(*)** Pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{S}_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^p \frac{z^n}{n!}.$$

a. Exprimer $\mathrm{S}_{p+1}(z)$ en fonction de $\mathrm{S}_0(z), \ldots, \mathrm{S}_p(z)$.

b. Calculer $\mathrm{S}_p(z)$ pour tout $p \in [\![0, 3]\!]$.

Exercice 7. **(*)** Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n)!}$. Idem avec $\sum_{n\geqslant 0} \frac{x^n}{(2n+1)!}$

Exercice 8. **(**)** Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$. Généraliser.

Exercice 9. **(**)** Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\cos(n\theta)}{n} x^n$.

Exercice 10. **(**)** Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $a_n = \int_0^1 (1+t^2)^n \,\mathrm{d}t$.

a. Pour tout c dans $]0, 1[$, prouver la minoration $a_n \geqslant (1-c)(1+c^2)^n$.

b. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

c. Exprimer sa somme sur l'intervalle ouvert de convergence.

Exercice 11. **(*)** Montrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x^2/2} \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ puis déterminer son développement au moyen d'une équation différentielle.

Exercice 12. (**) On considère deux séries entières $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n z^n$, dont on note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs.

Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n z^n$ vaut au moins $\mathrm{R}_a\mathrm{R}_b$.

Donner un exemple où R vaut $\mathrm{R}_a\mathrm{R}_b$ et un exemple où ça n'est pas le cas.

Exercice 13. (**) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note I_n le nombre d'involutions de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, c'est-à-dire le nombre d'applications $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ telles que $f \circ f = \mathrm{Id}$. Par convention, on pose $\mathrm{I}_0 = 1$.

a. Calculer $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2, \mathrm{I}_3$.

b. (***) Pour tout entier $n \geqslant 3$, prouver la relation $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1} + (n-1)\mathrm{I}_{n-2}$ et vérifier qu'elle est encore valable pour $n = 2$.

c. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver la majoration $\mathrm{I}_n \leqslant n!$ et en déduire que la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{I}_n}{n!} x^n$$

est définie sur $]-1, 1[$.

d. Pour tout x dans $]-1, 1[$, trouver un lien entre $f'(x)$ et $f(x)$.

e. En déduire une expression de $f(x)$ puis une expression de I_n sous forme d'une somme.

Exercice 14. (**) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note T_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments (par convention, on pose $\mathrm{T}_0 = 1$).

a. (***) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer la relation $\mathrm{T}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{T}_k$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer la majoration $\mathrm{T}_n \leqslant n^n$.

c. On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{\mathrm{T}_n}{n!} x^n$. Montrer qu'il est strictement positif.

d. On définit sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{T}_n}{n!} x^n$.

Trouver une relation entre f' et f et en déduire une expression de f.

e. En déduire une expression de T_n sous forme d'une somme de série qu'on ne cherchera pas à simplifier.

Exercice 15. (**) Soit f une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe λ dans $]0, 1[$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f'(x) = f(\lambda x).$$

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f^{(k)}(0)$ pour tout k dans $\mathbb{N}$.

b. À l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

c. (***) Pour tout $\alpha > 0$, montrer les relations $x^\alpha = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(f(x))$ et $f(x) = \underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(\mathrm{e}^{\alpha x})$.

Exercice 16. (***) Étant donné une suite complexe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes

(i) $\sqrt[n]{|a_n|} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$;

(ii) la série entière $\sum_{n\geqslant 0} n!\, a_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif.
