

EXERCICE 1

Problème 1

Calcul de l'intégrale de Dirichlet

L'objectif de cet exercice est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$$

et de calculer sa valeur. On considère la fonction $f :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x, t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad f(x, t) = \frac{\sin(t)}{t} e^{-xt}.$$

On définit également la fonction $u :]0, +\infty[\times]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall (x, t) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[, \quad u(x, t) = -\frac{x \sin(t) + \cos(t)}{1 + x^2} e^{-xt}.$$

Dans l'exercice, on pourra utiliser **sans la démontrer** l'inégalité $|\sin(t)| \leq |t|$ valable pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Partie I - Préliminaires

- Q1. Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
- Q2. En utilisant par exemple une intégration par parties, montrer que l'intégrale I est convergente si et seulement si l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2} dt$$

est convergente. En déduire que l'intégrale I converge.

- Q3. Soit $x \geq 0$. Montrer que $t \mapsto u(x, t)$ est une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)e^{-xt}$ sur $]0, +\infty[$.

Dans la suite de l'exercice, on définit la fonction $F :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad F(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t) dt.$$

Partie II - Calcul de F sur $]0, +\infty[$

- Q4. Montrer que $|F(x)| \leq \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$. En déduire la limite de F en $+\infty$.
- Q5. Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad F'(x) = - \int_0^{+\infty} \sin(t) e^{-xt} dt.$$

- Q6. En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression de $F'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$. Conclure que :

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}(x).$$

Partie III - Conclusion

On considère les fonctions $F_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ et $F_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in [0, 1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x, t) dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x, t) dt.$$

Q7. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0, 1]$.

Q8. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \frac{u(x, t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que :

$$F_2(x) = \frac{x \sin(1) + \cos(1)}{1 + x^2} e^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2} dt.$$

Q9. Montrer que la fonction F_2 est continue sur $[0, 1]$.

Q10. En déduire que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I .

~~Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.~~

~~Q20. Calculer $\Delta^{-1}A\Delta$. En déduire à nouveau que la matrice A est diagonalisable sur \mathbb{R} .~~

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Problème 2

Objectifs

Dans cette **partie**, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \cos^k(x) \sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le \mathbb{C} -espace vectoriel défini par :

$$V_n = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \mid (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

Q21. Montrer que la famille (f_0, \dots, f_n) est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n .

Q22. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, montrer que $f'_k \in V_n$. En déduire que :

$$\begin{aligned} \varphi_n : V_n &\rightarrow V_n \\ f &\mapsto \varphi_n(f) = f' \end{aligned}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n dans la base (f_0, f_1, \dots, f_n) est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$.

Q23. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}$.

Q24. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, g_k \in V_n$.

Q25. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, calculer g'_k . En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.

Q26. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

Q27. Écrire la décomposition de g_n dans la base (f_0, \dots, f_n) et en déduire que :

$$\text{Ker}(B_n - i n I_{n+1}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $q_k = i^{n-k} \binom{n}{k}$.

Partie III - Les matrices de Kac de taille $n + 1$

Objectifs

Dans cette **partie**, on introduit la matrice A_n . On utilise les résultats de la **Partie II** pour étudier les propriétés spectrales de la matrice A_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note A_n la matrice tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général a_{kl} de la matrice A_n vérifie donc :

- $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leq k \leq n$,
- $a_{k,k-1} = n - k + 2$ si $2 \leq k \leq n + 1$,
- $a_{kl} = 0$ pour tous les couples $(k, l) \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket^2$ non couverts par les formules précédentes.

On note enfin $D_n \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont le k -ième terme diagonal d_{kk} vérifie $d_{kk} = i^{k-1}$.

Q28. Soient $M = (m_{kl})_{1 \leq k, l \leq p} \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice de taille p et $D = (d_{kl})_{1 \leq k, l \leq p} \in \mathbf{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de taille p . Exprimer le terme général de la matrice DM en fonction des m_{kl} et des d_{kl} , puis exprimer le terme général de la matrice MD en fonction des m_{kl} et des d_{kl} .

Q29. Montrer que $D_n^{-1} A_n D_n = -i B_n$ où B_n est la matrice déterminée dans la **Partie II**. En déduire une relation simple entre $\chi_{A_n}(X)$ et $\chi_{B_n}(iX)$, où χ_{A_n} et χ_{B_n} sont les polynômes caractéristiques respectifs de A_n et B_n .

Q30. En déduire, à l'aide de la **Partie II**, que A_n est diagonalisable sur \mathbb{R} , que les valeurs propres de A_n sont les entiers de la forme $2k - n$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et que :

$$\text{Ker}(A_n - n I_{n+1}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $p_k = \binom{n}{k}$.