PC* — mathématiques **samedi 20 janvier 2024**
Devoir surveillé n° 5 — piste rouge **durée : 3 heures**

Problème I

On note E un espace vectoriel réel de dimension finie. On note n sa dimension et on suppose qu'elle est supérieure ou égale à 2.

Pour tout couple (A, B) d'endomorphismes de E, le composé $\mathrm{A} \circ \mathrm{B}$ sera abrégé en AB.

Pour tout couple (A, B) d'endomorphismes de E, on note [1]

$$[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = \mathrm{A} \circ \mathrm{B} - \mathrm{B} \circ \mathrm{A} = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}.$$

L'endomorphisme identité de E sera noté I.

On considère deux endomorphismes A et B de E *non nuls*.

On suppose qu'il existe α dans $\mathbb{R}^*$ vérifiant la relation $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = \alpha \mathrm{B}$.

1.a. Pour tout triplet $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})$ d'endomorphismes de E, vérifier l'égalité

$$[\mathrm{U}, \mathrm{VW}] = [\mathrm{U}, \mathrm{V}]\mathrm{W} + \mathrm{V}[\mathrm{U}, \mathrm{W}].$$

1.b. Pour tout polynôme P de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, vérifier l'égalité

$$[\mathrm{A}, \mathrm{P}(\mathrm{B})] = \alpha \mathrm{B}\mathrm{P}'(\mathrm{B}).$$

1.c. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, en déduire que $\mathrm{Ker}(\mathrm{B}^k)$ est stable par A .

1.d. Montrer que B possède un polynôme annulateur non trivial.

On considère alors un tel polynôme annulateur P, que l'on suppose de degré minimal, et on note d son degré.

1.e. Montrer l'égalité $\mathrm{XP}' = d\mathrm{P}$.

1.f. En déduire que B^n est nul.

2. Jusqu'à la fin du problème, on suppose que B est de rang $n - 1$.

2.a. Montrer que la suite $(\mathrm{rg}(\mathrm{B}^i) - \mathrm{rg}(\mathrm{B}^{i+1}))_{i \geqslant 0}$ est décroissante.

2.b. En déduire que B^{n-1} n'est pas nul.

On prend x dans E tel que $\mathrm{B}^{n-1}(x)$ ne soit pas nul et on pose

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad x_k = \mathrm{B}^{n-k}(x).$$

2.c. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que la famille $(x_1, \ldots, x_k)$ est une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{B}^k)$.

2.d. Montrer que x_1 est un vecteur propre de A.
On notera λ la valeur propre qui lui est associée.

2.e. Quelle est la forme de la matrice de A relativement à la base $(x_1, \ldots, x_n)$ de E ?
On précisera les coefficients diagonaux.

2.f. Montrer que le nombre $\lambda - (n-1)\alpha$ est une valeur propre de A.

2.g. Soit x un vecteur propre de A. On note μ la valeur propre de A associée au vecteur propre x.
Montrer que $\mathrm{B}(x)$ est soit le vecteur nul de E soit un vecteur propre de A, dont on précisera alors la valeur propre associée.

2.h. Soit e_n un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda - (n-1)\alpha$.
Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$, on pose $e_k = \mathrm{B}^{n-k}(e_n)$.
Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E dans laquelle l'endomorphisme A se diagonalise.

2.i. Donner les expressions des matrices de A et de B dans cette base.

1. On parle de *crochets de Lie*, en référence au mathématicien norvégien Sophus Lie (1842-1899).

Problème II — théorème de Borel

Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant [2].

Théorème. Pour toute suite complexe $(c_p)_{p\in\mathbb{N}}$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ telle que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad f^{(p)}(0) = c_p.$$

On définit la fonction $\psi : x \mapsto \dfrac{1}{x-\mathrm{i}}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Pour tout b réel, on définit la fonction $\varphi_b : x \mapsto \dfrac{1}{1+b^2x^2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On a donc en particulier

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Partie 1 — calculs préliminaires

Question 1. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, montrer la relation

$$\psi^{(p)}(x) = \frac{(-1)^p\, p!}{(x-\mathrm{i})^{p+1}}.$$

Question 2. Trouver deux constantes complexes a et b telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{1+x^2} = \frac{a}{x-\mathrm{i}} + \frac{b}{x+\mathrm{i}}.$$

Question 3. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, en déduire une expression de la fonction $\varphi_1^{(p)}$.

Question 4. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, montrer la majoration

$$\left|(x+\mathrm{i})^{p+1} - (x-\mathrm{i})^{p+1}\right| \leqslant 2(1+x^2)^{\frac{p+1}{2}}.$$

Question 5. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, montrer la majoration

$$\left|\varphi_1^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Question 6. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^*$, montrer la majoration

$$|a| \times \left|\varphi_a^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{p!}{|x|^{p+1}}.$$

Partie 2 — étude d'une série de fonctions

On se donne une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit alors la fonction u_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n(x) = \frac{a_n\, x^n}{1 + n!\, a_n^2\, x^2}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $r_n = \sqrt{n!} \times a_n$.

Question 7. Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout entier $n \geqslant p$, montrer que la dérivée p-ième de la fonction u_n est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad u_n^{(p)}(x) = a_n \times \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \times \varphi_{r_n}^{(p-k)}(x).$$

Question 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, montrer que $u_n^{(p)}(0)$ est nul. Déterminer la valeur de $u_n^{(n)}(0)$.

2. Démontré par Émile Borel en 1895, mais également par Giuseppe Peano en 1884.

Question 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $p \in [\![0, n-1]\!]$, montrer l'inégalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left|u_n^{(p)}(x)\right| \leqslant \frac{|x|^{n-p-1}}{\sqrt{n!}}\, p!\, 2^n.$$

Question 10. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Sa somme est notée U.

Question 11. Pour tout $s > 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant p+1} u_n^{(p)}$ converge normalement sur le segment $[-s, s]$.

Question 12. Montrer que la fonction U est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Question 13. Montrer l'égalité $\mathrm{U}(0) = a_0$ ainsi que

$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{U}^{(p)}(0) = \sum_{n=0}^{p-1} u_n^{(p)}(0) + p!\, a_p.$$

Partie 3 — démonstration du théorème de Borel

Question 14. Démontrer le théorème de Borel pour les suites réelles.

Question 15. Démontrer le théorème de Borel dans le cas général.