PC* – lycée Henri Poincaré DS n°5 – piste noire
Samedi 20 janvier 2024

ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2009

Problème 1

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

Endomorphismes d'espaces vectoriels de dimension infinie

Première partie

Pour tout nombre réel λ, on désigne par T_λ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{C}^2$ représenté par la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix}$ dans la base naturelle de $\mathbf{C}^2$ notée (e_1, e_2).

1. Construire une base $(f_{\lambda,1}, f_{\lambda,2})$ de $\mathbf{C}^2$ telle que chacun des $f_{\lambda,i}$ ait une composante sur e_1 égale à 1 et, en outre, ayant les propriétés suivantes :

1.a) Si $|\lambda| > 2$, il existe un réel μ_λ de module > 1 tel que

$$T_\lambda f_{\lambda,1} = \mu_\lambda f_{\lambda,1} \quad , \quad T_\lambda f_{\lambda,2} = \mu_\lambda^{-1} f_{\lambda,2} \, .$$

1.b) Si $|\lambda| < 2$, on a une formule analogue, mais où μ_λ est un nombre complexe de module 1 et de partie imaginaire > 0, que l'on précisera.

1.c) Si $\lambda = 2$, on a

$$T_2 f_{2,1} = f_{2,1} \quad , \quad T_2 f_{2,2} = f_{2,1} + f_{2,2} \, .$$

1.d) Si $\lambda = -2$, on a

$$T_{-2} f_{-2,1} = -f_{-2,1} \quad , \quad T_{-2} f_{-2,2} = f_{-2,1} - f_{-2,2} \, .$$

Deuxième partie

On désigne par E l'espace vectoriel des suites de nombres complexes $x = (x_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ et par A l'endomorphisme de E défini par

$$\forall x \in E, \forall k \in \mathbf{Z} \quad , \quad (Ax)_k = x_{k-1} + x_{k+1} \, .$$

On s'intéresse au noyau de l'endomorphisme $A - \lambda\,\mathrm{id}_E$ où λ est un nombre **réel**.

2.a) Vérifier qu'un élément x de E appartient à Ker $(A - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ si et seulement si l'on a

$$\forall k \in \mathbf{Z}\,, \qquad \begin{pmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{pmatrix} = T_\lambda^k \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} .$$

2.b) Préciser la dimension de Ker $(A - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.

3. On suppose $x \in$ Ker $(A - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ et on note $\alpha_{\lambda,1}$ et $\alpha_{\lambda,2}$ les composantes, dans la base $(f_{\lambda,1}, f_{\lambda,2})$ de $\mathbf{C}^2$, du vecteur $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$. Démontrer les assertions suivantes :

3.a) Si $|\lambda| \neq 2$, on a

$$x_k = \mu_\lambda^k \alpha_{\lambda,1} + \mu_\lambda^{-k} \alpha_{\lambda,2} .$$

3.b) Si $\lambda = 2$, on a

$$x_k = \alpha_{2,1} + (k+1)\alpha_{2,2} .$$

3.c) Si $\lambda = -2$, on a

$$x_k = (-1)^k(\alpha_{-2,1} + (1-k)\alpha_{-2,2}) .$$

4. On fixe un entier $N \geqslant 2$ et on désigne par P_N l'ensemble des x de E tels que l'on ait $x_{k+N} = x_k$ pour tout $k \in \mathbf{Z}$.

Dire pour quelles valeurs de λ le sous-espace $\mathrm{Ker}(A - \lambda\,\mathrm{id}_E) \cap P_N$ n'est pas réduit à $\{0\}$ et, dans ce cas, en donner une base.

Troisième partie

On définit deux sous-espaces vectoriels de E de la façon suivante :

- E_1 est l'ensemble des éléments x de E tels que $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |x_k| < +\infty$ et on le munit de la norme

$$\|x\|_1 = \sum_{k\in\mathbf{Z}} |x_k| .$$

- E_∞ est l'ensemble des éléments u de E tels que $\sup_{k\in\mathbf{Z}} |u_k| < +\infty$ et on le munit de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{k\in\mathbf{Z}} |u_k| .$$

Dommage, hein?

5. Étant donnés $x \in E_1$ et $u \in E_\infty$, on pose

$$\langle x, u\rangle = \sum_{k\in\mathbf{Z}} x_k\, u_k .$$

Vérifier que, pour tout $u \in E_\infty$ (resp. tout $x \in E_1$), l'application $x \mapsto \langle x, u\rangle$ (resp. $u \mapsto \langle x, u\rangle$) est une forme linéaire continue sur E_1 (resp. sur E_∞) dont on précisera la norme.