PC* — mathématiques **samedi 20 janvier 2024**
Devoir surveillé n° 5 — piste noire **durée : 3 heures**

Problème II

On rappelle que la fonction ζ est définie sur $]1, +\infty[$ par

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Pour tout $s > 0$, on pose $\zeta_a(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$.

On rappelle que la suite de terme général $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ est convergente. Sa limite est notée γ.

Partie 1

Question 1. Justifier rapidement que la fonction ζ_a est bien définie sur $]0, +\infty[$ et préciser son signe.

Question 2. Pour tout $s > 1$, vérifier l'égalité $\zeta_a(s) = \left(1 - 2^{1-s}\right) \zeta(s)$.

Question 3. Justifier que la fonction ζ_a est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer sa dérivée à l'aide d'une somme de série.

Partie 2

Question 4. Pour tout $s > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{t^{s+1}}\, \mathrm{d}t$.

Question 5. Pour tout $s > 1$, en déduire l'égalité $\zeta(s) = s \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^{s+1}}\, \mathrm{d}t$.

Question 6. Montrer que la fonction $\mathrm{F} : s \mapsto \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^{s+1}}\, \mathrm{d}t$ est définie et continue sur $[1, +\infty[$.

Question 7. Exprimer $\mathrm{F}(1)$ en fonction de γ.

Question 8. En déduire que $\zeta(s) = \dfrac{1}{s-1} + \gamma + \mathrm{o}(1)$ quand s tend vers 1.

Partie 3

Question 9. Montrer que $\zeta_a(1) = \ln(2)$.

Question 10. Justifier la convergence de la série $\sum_{n \geqslant 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n}$ et exprimer sa somme.

On pourra faire intervenir le taux d'accroissement $\dfrac{\zeta_a(s) - \zeta_a(1)}{s-1}$.
