Problème I

On considère la fonction F définie par son développement en série entière

$$\mathrm{F} : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}.$$

Le but de ce problème est d'étudier le comportement de la fonction F en $+\infty$.

Partie 1

Question 1. Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

Question 2. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver la majoration $\binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}$.

Question 3. Pour tout x dans $[0, +\infty[$, en déduire la majoration $\mathrm{F}(x) \leqslant \mathrm{ch}(2x)$.

Question 4. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver la minoration $\binom{2n}{n} \geqslant 2^{2n}/(2n+1)$.

Question 5. Pour tout x dans $]0, +\infty[$, en déduire la minoration $\mathrm{F}(x) \geqslant \mathrm{sh}(2x)/(2x)$.

Question 6. Trouver un équivalent (aussi simple que possible) de $\ln(\mathrm{F}(x))$ quand x tend vers $+\infty$.

Partie 2

Dans cette partie, on calcule la *transformée de Laplace* de la fonction F, c'est-à-dire la fonction L(F) définie par

$$\mathrm{L(F)}(p) = \int_0^{+\infty} \mathrm{F}(t)\mathrm{e}^{-pt} \, \mathrm{d}t.$$

Question 7. Montrer que la fonction L(F) est définie sur l'intervalle $]2, +\infty[$.

Question 8. Pour tout u dans $]-1, 1[$, prouver la relation

$$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{u^{2n}}{2^{2n}}.$$

Question 9. Soit p dans $]0, +\infty[$. Pour tout k dans $\mathbb{N}$, montrer que l'intégrale

$$\mathrm{J}_k(p) = \int_0^{+\infty} t^k \mathrm{e}^{-pt} \, \mathrm{d}t$$

existe et vaut $k!/p^{k+1}$.

Question 10. À l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, obtenir une expression de $\mathrm{L(F)}(p)$ pour tout $p > 2$.

Question 11. On définit maintenant sur $]0, +\infty[$ la fonction $\Phi : t \mapsto \mathrm{e}^{2t}/\sqrt{t}$.

Montrer que la fonction $\mathrm{L}(\Phi)$ est définie sur l'intervalle $]2, +\infty[$ et trouver une expression de cette fonction. On admet la valeur

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}} = \sqrt{\pi}.$$

Question 12. Trouver la limite de $\mathrm{L(F)}(p)/\mathrm{L}(\Phi)(p)$ quand p tend vers 2.

Un théorème que nous ne prouverons pas ici montre que si G est une fonction équivalente à F en $+\infty$ (et vérifiant d'autres propriétés anodines), alors L(F) est équivalente à L(G) en 2. Cela suggère donc que F pourrait être équivalente à $\ell \times \Phi$ en $+\infty$, où ℓ est la limite de la dernière question.

Partie 3

Pour tout x réel, on pose $h_1(x) = \int_0^{\pi/2} \exp(x\cos(t))\ \mathrm{d}t$.

Pour tout entier n, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n}(t)\ \mathrm{d}t$.

Question 13. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver la relation $\mathrm{I}_n = \mathrm{I}_{n-1} \times (2n-1)/2n$.

Question 14. En déduire une expression de I_n avec des factorielles.

Question 15. À l'aide d'une intégration terme à terme, obtenir l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{2x\cos(t)}\ \mathrm{d}t.$$

Question 16. Pour tout x dans $\mathbb{R}$, prouver l'égalité

$$h_1(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xu}}{\sqrt{1-u^2}}\ \mathrm{d}u.$$

Partie 4

Pour tout x réel, on pose

$$h_2(x) = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{xu}}{\sqrt{1-u}}\ \mathrm{d}u, \qquad \text{et} \qquad h_3(x) = \int_0^1 \mathrm{e}^{xu}\sqrt{1-u}\ \mathrm{d}u.$$

Question 17. Justifier l'existence de $h_2(x)$.

Question 18. Effectuer le changement de variable $z = \sqrt{1-u}$ dans l'expression de $h_2(x)$ puis montrer que $h_2(x)$ admet un équivalent (quand x tend vers $+\infty$) de la forme $\mathrm{C} \times \Phi(x/2)$ pour une certaine constante C.

Question 19. Soit $x > 0$. Montrer l'égalité $h_3(x) = -1/x + h_2(x)/(2x)$. En déduire que $h_3(x)$ est négligeable devant $h_2(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Question 20. Montrer l'existence d'une constante D telle que

$$\forall u \in [0,1[, \qquad \left|\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{1}{\sqrt{2(1-u)}}\right| \leqslant \mathrm{D}\sqrt{1-u}.$$

Question 21. Obtenir finalement un équivalent simple de $\mathrm{F}(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 1. (*) On définit sur $[-1,1]$ la fonction $f : x \mapsto \mathrm{Arcsin}^2(x)$.

a. Pour tout x dans $]-1,1[$, prouver la relation

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n}\frac{x^{2n}}{4^n}.$$

b. Prouver que la fonction f est développable en série entière sur l'intervalle $]-1,1[$ et exprimer son développement en série entière sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^{2n}.$$

Le coefficient d_n sera exprimé sous la forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à simplifier.

c. Pour tout x dans $]-1,1[$, prouver l'égalité $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2$.

d. En déduire une relation de récurrence entre les coefficients d_n puis trouver une expression simplifiée de d_n.
