Recueil des oraux de mathématiques PC* — lycée Henri Poincaré

Exercice 1. (Mines-Ponts PC, 2016, Meryem Ragbaoui)

On définit une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant $(a_0, a_1) = (1, 1)$ puis $a_{n+1} = a_n + \dfrac{2}{n+1}a_{n-1}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

1. Trouver le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$.

2. Calculer $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Interlude. Énoncer les théorèmes d'intégration terme à terme.

Exercice 2. (Mines-Ponts PC, 2016, Meryem Ragbaoui)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E.

Prouver l'inégalité $\dim(\mathrm{Ker}(f^2)) \leqslant 2\dim(\mathrm{Ker}(f))$.

Commentaire de la candidate. L'examinateur était correct et respectueux.

Exercice 3. (Centrale-Supélec PC, 2016, Mathilde Zoch)

On note (E) l'équation différentielle $|x|y' + (1-x)y = x$.

Montrer que (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (Centrale-Supélec PC, 2016, Hugo Dupeyras)

On pose $f_n(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+x^4)^n}$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction f_n est définie sur $]0, +\infty[$.

b. Pour tout $x > 1$, prouver que la suite $(f_n(x))_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

c. Pour tout $x > 1$, prouver que la série $\sum f_n(x)$ est convergente et exprimer sa somme.

d. Prouver que la série $\sum f_n(1)$ est divergente. On raisonnera par l'absurde.

Exercice 5. (Centrale-Supélec PC Python, 2016, Mathilde Zoch)

On se donne un entier $p \geqslant 2$. On appelle *matrice-bande associée* au triplet (a, b, c) la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux valent b, les coefficients juste au-dessus de la diagonale valent c et les coefficients juste en dessous de la diagonale valent a, les autres coefficients étant tous nuls.

On note A la matrice-bande associée au triplet $(-1, 3, -1)$.

1. Montrer que la matrice A est inversible.

2. On note B la colonne de $\mathbb{R}^p$ dont tous les coefficients valent 1. Montrer que l'équation $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ possède une unique solution, notée X^*.

3. Trouver une matrice C telle que $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ soit équivalent à $\mathrm{X} = \mathrm{CX} + \mathrm{B}/3$.

On définit alors $\mathrm{T} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{CX} + \mathrm{B}/3$. Que vaut $\mathrm{T}(\mathrm{X}^*)$?

4. Écrire une fonction `matBande(p, a, b)` qui prend en entrée un entier p et deux flottants a et b, et qui renvoie la matrice bande de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ associée au triplet (b, a, b).

5. Écrire une fonction `T(p, X)` qui renvoie $\mathrm{CX} + \mathrm{B}/3$.

6. On munit $\mathbb{R}^p$ de la norme infinie. Montrer que T est lipschitzienne relativement à cette norme et trouver la meilleure constante de Lipschitz, c'est-à-dire la plus petite constante k telle que

$$\forall (\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in (\mathbb{R}^p)^2, \qquad ||\mathrm{T}(\mathrm{X}) - \mathrm{T}(\mathrm{Y})||_\infty \leqslant k\, ||\mathrm{X} - \mathrm{Y}||_\infty.$$

7. On fixe X_0 dans $\mathbb{R}^p$ puis on pose $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{T}(\mathrm{X}_n)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Obtenir une majoration de $||\mathrm{X}_n - \mathrm{X}^*||_\infty$. Qu'en déduit-on ?

8. Pour chaque valeur de p dans $[\![2, 7]\!]$, déterminer X^* par cette méthode itérative et comparer avec le résultat que donne `numpy` par inversion directe de la matrice A.

Exercice 6. (ENS Lyon PC, 2016, Léonor Groell)

Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{P}(\mathrm{X})^2$.

Exercice 7. (Centrale PC, 2016, Imane Benhayoun)

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^n \mathrm{e}^{-t} t^n \,\mathrm{d}t$.

a. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

b. Prouver que sa limite est inférieure ou égale à 1/2.

Exercice 8. (Mines-Ponts PC, 2016, Maxime Vergès)

Nature de la série de terme général $n^\alpha \displaystyle\prod_{p=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^p}{\sqrt{p}}\right)$.

Exercice 9. (Mines-Ponts PC, 2016, Maxime Vergès)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient A et B deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que A et B ont la même dimension.

Prouver que A et B possèdent un supplémentaire commun dans E.

Exercice 10. (Mines-Ponts PC, 2016, Maxime Vergès)

Une urne contient M pommes vertes et N pommes rouges. On les mange une par une et on s'arrête quand on a mangé la dernière pomme rouge.

Calculer la probabilité d'avoir mangé toutes les pommes.

Exercice 11. (Mines-Ponts PC, 2016, Guillaume Peiffert)

Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 1 + 2\int_0^x f(t)\cos(x - t)\,\mathrm{d}t.$$

Interlude. Tout sur l'intégration terme à terme.

Exercice 12. (Mines-Ponts PC, 2016, Guillaume Peiffert)

Pour tout polynôme réel P, on pose $f(\mathrm{P}) = (\mathrm{X}^3 - \mathrm{X})\mathrm{P}' - (\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}$.

Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Exercice 13. (Centrale PC avec Python, 2016, Imane Benhayoun)

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n. Le premier joueur tire des boules de l'urne sans remise ; il s'arrête quand il obtient la boule portant le numéro n. On note X_1 le nombre de tirages effectués par le premier joueur. Le deuxième joueur effectue ensuite des tirages sans remise jusqu'à ce qu'il obtienne la boule portant le numéro maximal parmi les boules restantes. On note X_2 le nombre de tirages effectués par le deuxième joueur (avec la convention $X_2 = 0$ si $X_1 = n$).

a. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X_1.

b. Déterminer la loi de X_2 sachant $[X_1 = j]$. En déduire la loi de X_2 ainsi que son espérance.

c. Écrire une fonction qui simule X_1 et X_2.

Note du transcripteur. C'est bien sûr l'exercice 16 de la fiche « Maths avec Python », que nous avons corrigé le samedi 11 juin.

Exercice 14. (Centrale PC, 2016, Stevie Gayet)

Soit M une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (cela signifie que ses coefficients sont positifs et que sur chaque ligne, la somme des coefficients vaut 1).

a. Vérifier que 1 est une valeur propre de M.

b. Montrer que les valeurs propres de M ont un module majoré par 1.

c. Soit λ une valeur propre de M de module 1. Montrer que λ vaut 1.

Exercice 15. (Centrale PC, 2016, Thibaut Froeliger)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Γ_n le graphe de la fonction $f_n : x \mapsto \cos^n(x)$ sur $[0, \pi/2]$.

On note d_n la distance de l'origine O à Γ_n, c'est-à-dire le nombre défini par

$$d_n = \inf \{\mathrm{OM} \ ; \ \mathrm{M} \in \Gamma_n\} .$$

a. Montrer qu'il existe exactement un point M de Γ_n qui vérifie l'égalité $d_n = \mathrm{OM}$. L'abscisse de ce point est notée x_n.

b. Montrer la relation $\cos^{2n-1}(x_n) = \dfrac{x_n}{n \sin(x_n)}$.

c. Montrer que x_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

d. (Ajout du transcripteur.) Trouver un équivalent de x_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 16. (CCP PC, 2016, Benoît Supiot)

On note (E) l'équation différentielle $2(x - x^2)y'' + (x - 2)y' - y = 0$.

1. Montrer que la fonction $y_0 : x \mapsto x - 2$ est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

Dans les questions 2 et 3, la lettre I désigne indifféremment l'intervalle $]1, 2[$ ou $]2, +\infty[$.

2. Soit y une fonction deux fois dérivable sur I. Pour tout x dans I, on pose

$$z(x) = \frac{y(x)}{x - 2}.$$

Montrer que y est solution de (E) sur I si, et seulement si, la fonction z' est solution sur I d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à déterminer.

3. On définit la fonction $\phi : x \mapsto \dfrac{(x-1)^{1/2}}{x-2}$ sur l'intervalle I.

3.a. Montrer que ϕ est dérivable sur I et calculer sa dérivée.

3.b. Résoudre (E) sur I. On pourra utiliser le calcul suivant

$$\frac{4-3x^2}{x(x-1)(x-2)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x-2} - \frac{4}{x-2}.$$

4. Résoudre (E) sur $]1, +\infty[$.

Exercice 17. (CCP PC, 2016, Benoît Supiot)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n.

1. Si f est un projecteur, quel est le lien entre $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{tr}(f)$?

2. Si $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{tr}(f) = 1$, montrer que f est un projecteur.

Exercice 18. (Mines-Télécom PC, 2016, Benoît Supiot)

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$(\mathrm{A}_n)_{i,j} = \begin{cases} 2 & \text{si } i = j \\ -1 & \text{si } |i-j| = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note d_n le déterminant de la matrice A_n.

1. Montrer la relation $d_{n+2} = 2d_{n+1} - d_n$.

2. Exprimer d_n en fonction de n.

3. La matrice A_n est-elle diagonalisable ?

4. La matrice A_n admet-elle 0 pour valeur propre ?

Exercice 19. (Mines-Télécom PC, 2016, Benoît Supiot)

Soit N dans $\mathbb{N}^*$. Soit p dans $]0, 1[$. On pose $q = 1 - p$.

On se donne des variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{N}$ mutuellement indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre p.

1. Pour tout i dans $[\![1, \mathrm{N}]\!]$ et tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_i > n)$.

2. On définit la variable aléatoire $\mathrm{Y}_\mathrm{N} = \min(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_\mathrm{N})$. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $\mathbb{P}(\mathrm{Y}_\mathrm{N} > n)$.

3. Montrer que Y_N possède une espérance et calculer sa valeur.

Exercice 20. (Centrale PC, 2016, Léonor Groell)

Soit n dans $\mathbb{N}^*$. Soit M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que M est nilpotente, ce qui signifie qu'il existe un entier k pour lequel la matrice M^k est nulle.

1. Que dire du rang de M ?

2. Que dire de la trace de M ?

Exercice 21. (CCP PC, 2016, Meryem Ragbaoui)

On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que F est impaire et croissante.

3. Montrer que F possède une limite finie en $+\infty$.

4. Montrer l'existence d'une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'identité

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n a_n}{4^n} x^{4n+1}.$$

5. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité $\mathrm{F}(x) + \mathrm{F}(1/x) = 2\mathrm{F}(1)$.

6. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout x dans $]0,1[$, prouver la majoration

$$\left| \mathrm{F}(x) - \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n a_n}{4^n} x^{4n+1} \right| \leqslant \frac{1}{4p+5}.$$

Exercice 22. (CCP PC, 2016, Meryem Ragbaoui)

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On considère une variable aléatoire Y telle que pour tout n dans $\mathbb{N}$, la loi de Y sachant $[\mathrm{X} = n]$ soit la loi $\mathcal{B}(n,p)$.

Trouver la loi de Y.

Exercice 23. (Centrale PC avec Python, 2016, Stevie Gayet)

Pour tout $x > 0$, on pose $f(x) = \ln(x)/x$.

1. Étudier les variations de la fonction f et la tracer à l'aide de Python.

2. Résoudre l'équation $a^b = b^a$, l'inconnue étant un couple (a,b) d'entiers strictement positifs avec $a < b$.

3. Pour tout x dans $[\mathrm{e}, +\infty[$, montrer qu'il existe un unique y dans $]1, \mathrm{e}]$ vérifiant l'égalité $x^y = y^x$. Cet élément y est noté $\varphi(x)$ dans la suite.

4.a. Montrer que la fonction φ est continue sur $[\mathrm{e}, +\infty[$ et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\mathrm{e}, +\infty[$.

4.b. Tracer le graphe de la fonction φ.

4.c. Effectuer un développement limité à l'ordre 2 de $f(\mathrm{e}(1+h))$ quand h tend vers 0. En déduire la relation

$$\varphi(\mathrm{e}(1+h)) = \mathrm{e}(1 - h + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)).$$

5. Pour tout $t > 0$, prouver l'encadrement $\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t < \mathrm{e} < \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t+1}$.

6.a. À l'aide de Python, vérifier l'identité $\varphi\left(\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t\right) = \left(1+\dfrac{1}{t}\right)^{t+1}$.

6.b. Prouver cette identité rigoureusement.

7. Proposer un arc paramétré pour représenter la fonction φ.

Exercice 24. (Centrale PC, 2016, Guillaume Peiffert)

Soit A une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est *définie positive*, ce qui signifie qu'elle vérifie la propriété suivante

$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, \qquad \mathrm{X}^{\mathrm{T}} \cdot \mathrm{A} \cdot \mathrm{X} > 0.$$

1. Montrer qu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$.

2. On note λ la plus grande valeur propre de A et μ la plus petite.
Pour tout vecteur X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, démontrer l'encadrement

$$||\mathrm{X}||^4 \leqslant (\mathrm{X}|\mathrm{AX})(\mathrm{X}|\mathrm{A}^{-1}\mathrm{X}) \leqslant \frac{(\lambda+\mu)^2}{4\lambda\mu}||\mathrm{X}||^4.$$

Exercice 25. (Centrale PC avec Python, 2016, Léonor Groell)

On pose $\mathrm{S}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$.

1. Trouver le rayon de convergence de cette série entière.

2. Tracer le graphe de S sur un intervalle adapté.

3. On pose $\mathrm{T}(x) = x\mathrm{S}(x^2)$ quand c'est possible. Exprimer $\mathrm{T}'(x)$ puis $\mathrm{T}(x)$.

4. Obtenir une expression de $\mathrm{S}(x)$ valable pour tout $x > 0$ (dans l'intervalle de convergence) puis une expression valable pour tout $x < 0$.

5. On prend y dans $[1/\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ et on pose $u = \dfrac{1-y}{1+y}$.

Montrer la majoration $|u| \leqslant 1/4$ et l'égalité $2\mathrm{T}(u) = \ln(y)$.

6. Écrire une fonction `approx(y)` qui prend y en entrée et renvoie la valeur de $2\sum_{n=0}^{6} \frac{u^{n+1}}{2n+1}$, où l'on a posé de nouveau $u = (1-y)/(1+y)$.

7. Montrer que `approx(y)` approche $\ln(y)$ à 10^{-10} près.

Exercice 26. (CCP PC, 2016, Paul Toniolo)

On se donne une fonction f définie sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et tout x dans $[0, +\infty[$, on pose

$$u_n(x) = f(n+x) - f(n).$$

On pose $\mathrm{F}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ quand c'est possible.

1. Pour tout N dans $\mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $\sum_{n=1}^{\mathrm{N}} u_n(1) = f(\mathrm{N}+1) - f(1)$. En déduire que l'existence de F(1) équivaut à la convergence de la suite $(f(n))_{n\geqslant 1}$.

2. On prend $f : x \mapsto \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$. Montrer que F(1) existe et donner sa valeur.

3. On prend $f : x \mapsto \sin(\pi x + \pi\sqrt{x}/2)$. Étudier l'existence de $\mathrm{F}(1)$. Indication : considérer $f((2n+1)^2)$.

4. Dans cette question, on fait l'hypothèse que la série $\sum_{n \geqslant 1} f(n)$ est convergente. Sa somme est notée S.

a. Montrer que pour tout p dans $\mathbb{N}$, le nombre $\mathrm{F}(p)$ existe.

b. Montrer que $\sum_{p=0}^{+\infty} (\mathrm{F}(p) - \mathrm{F}(p+1))$ existe et exprimer sa valeur en fonction de S.

5. Pour tout entier $p \geqslant 2$, on note C_p l'énoncé « le nombre $\mathrm{F}(p)$ existe ». Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f pour l'énoncé C_p soit vrai.

6. Montrer que la fonction de la question 3 vérifie C_2.

Exercice 27. (CCP PC, 2016, Paul Toniolo)

On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie comme suit : la première ligne, la dernière ligne et la première colonne sont constituées de 1, les autres coefficients de la dernière colonne valent 2, les autres coefficients sont nuls.

Déterminer le rang de A et son image. Prouver que A est diagonalisable.

Exercice 28. (CCP PC, 2016, Marie Ménétré)

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(t)\ \mathrm{d}t$.

On admet la relation de récurrence $u_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} u_n$.

On note (E) l'équation différentielle $(x^2-1)y''(x) + 3xy'(x) + y(x) = 0$.

1. Pour tout t dans $[0, \pi/2]$, déterminer la limite de $\cos^n(t)$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum u_{2n+1}x^{2n+1}$.

Pour tout x dans $]-1,1[$, on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}x^{2n+1}$.

4. Pour tout x dans $]-1,1[$, prouver l'égalité

$$(x^2-1)g''(x) + 2xg'(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left((2n+2)^2 u_{2n+1} - (2n+2)(2n+3)u_{2n+3}\right) x^{2n+1}.$$

En déduire que g est solution de (E) sur $]-1,1[$.

On admet que la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n}x^{2n}$ est également solution de (E) sur $]-1,1[$.

5. Exprimer l'ensemble des solutions de (E) sur $]-1,1[$ à l'aide des fonctions f et g.

6. Pour tout x dans $]-1,1[$, prouver l'égalité $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{x}{1-x^2\cos^2(t)} \cos(t)\ \mathrm{d}t$.

7. En déduire une expression de $g(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 29. (CCP PC, 2016, Marie Ménétré)

On rappelle que la formule $(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)\,\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on considère le polynôme $\mathrm{P}_n = \sqrt{n}(1-\mathrm{X})^n$.

1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, calculer $||\mathrm{P}_n||^2$.

2. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme T de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tel que

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \qquad (\mathrm{T}|\mathrm{P}) = \mathrm{P}(0).$$

Exercice 30. (CCP PC, 2016, Lucas Léonard)

Pour tout couple (n,p) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$, on note $\mathrm{E}_{n,p}$ le nombre de solutions de l'équation

$$\max(|x_1|,\ldots,|x_n|) = p,$$

d'inconnue $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{Z}^n$.

1. Calculer $\mathrm{E}_{1,1}$ et $\mathrm{E}_{2,2}$.

2. On note $\mathrm{S}_{n,p}$ le nombre de solutions de l'inéquation $\max(|x_1|,\ldots,|x_n|) \leqslant p$.
Exprimer $\mathrm{E}_{n,p}$ à l'aide de certains des $\mathrm{S}_{n,k}$.

3. Montrer l'égalité $\mathrm{E}_{n,1} = 3^n - 1$.

4. Plus généralement, prouver l'égalité $\mathrm{E}_{n,p} = (2p+1)^n - (2p-1)^n$ si $p \geqslant 1$.

5. En déduire qu'il existe une constante C telle que $\mathrm{E}_{n,n}$ soit équivalent à $\mathrm{C}(2n)^n$.

6. Compter le nombre de solutions du système

$$\max(|x_1|,\ldots,|x_n|) = p, \qquad \min(|x_1|,\ldots,|x_n|) = p-1.$$

Exercice 31. (CCP PC, 2016, Lucas Léonard)

Trouver l'unique solution du problème de Cauchy

$$y'' - 2y' + 2y = 1, \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2,$$

notée f.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $u_n = f^{(n+1)}(0)$. Trouver une relation de récurrence sur les u_n.

Exercice 32. (Centrale PC avec Python, 2016, Guillaume Peiffert)

On considère une fonction f définie et dérivable sur $[0,1]$ et on suppose qu'elle vérifie la relation

$$\forall x \in [0,1], \qquad f'(x) = f(x^2).$$

1. Écrire une fonction `indice(x, h=0.01)` qui prend en entrée un élément x de $[0,1]$ et renvoie l'entier i tel que $t_i \leqslant x < t_{i+1}$, où l'on note $t_i = i \times h$.

2. Avec la méthode d'Euler, créer la liste des nombres $f(t_i)$ pour i variant de 0 à n, avec $n =$ indice(1).

3. Avec Python, représenter graphiquement la fonction f sur $[0,1]$.

4. On fait l'hypothèse que f est développable en série entière sur $[0,1]$ et on introduit son développement

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

a. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, prouver la relation $a_{2p+1} = a_p/(2p+1)$. Obtenir également l'égalité $a_{2p} = 0$ pour tout p dans $\mathbb{N}^*$.

b. Pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, prouver la relation $a_{2^p-1} = a_0 \displaystyle\prod_{i=1}^{p} \frac{1}{2^i - 1}$.

c. On rappelle que tout entier n possède une décomposition de la forme $n = \sum\limits_{i=0}^{n} \varepsilon_i 2^i$, où les ε_i valent 0 ou 1.

Montrer que si l'un des ε_i est nul, alors a_n est nul.

5. Synthèse : construire une fonction f solution sur $[0,1]$ du problème $y'(x) = y(x^2)$.

Exercice 33. (CCP PC, 2016, Mathilde Zoch, Thibaut Froeliger)

On pose $\mathrm{J}(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{t^n}{(n!)^2}$.

1. Montrer que la fonction J est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout $t > 0$, prouver l'inégalité $\mathrm{J}(t) > 1$. Montrer que $\mathrm{J}(t) - 1$ est équivalent à t quand t tend vers 0.

3. Montrer qu'il est possible, pour tout $t > 0$, de poser

$$\mathrm{N}(t) = \mathrm{J}(t) \int_1^t \frac{1}{u\mathrm{J}(u)^2}\, \mathrm{d}u.$$

Vérifier alors l'identité

$$\forall t > 0, \qquad \mathrm{N}(t) - \mathrm{J}(t)\ln(t) = \mathrm{J}(t) \int_t^1 \frac{\mathrm{J}(u)^2 - 1}{u\mathrm{J}(u)^2}\, \mathrm{d}u.$$

4. On considère l'équation différentielle $ty''(t) + y'(t) - y(t) = 0$, notée (E).

a. Vérifier que J est solution de (E) sur $\mathbb{R}$.

b. Soit y une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,+\infty[$. On pose $z = y/\mathrm{J}$.
Montrer que y est solution de (E) sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, la fonction z' est solution d'une certaine équation différentielle linéaire d'ordre 1 à préciser.

c. En déduire une écriture de l'ensemble des solutions de (E) sur $]0,+\infty[$ à l'aide des fonctions J et N.

5. Montrer que la fonction $u \mapsto \dfrac{\mathrm{J}(u)^2 - 1}{u\mathrm{J}(u)^2}$ admet un prolongement par continuité en 0. En déduire que la fonction $t \mapsto \mathrm{N}(t) - \mathrm{J}(t)\ln(t)$ est bornée sur $]0,1]$.

6. Trouver les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 34. (CCP PC 2016, Thibaut Froeliger)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E.

Prouver l'implication $\mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{E} \Rightarrow \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Im}(f^2)$.

Exercice 35. (CCP PC 2016, Mathilde Zoch)

On considère l'endomorphisme $\Delta : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+2) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$ de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

a. Déterminer le noyau de Δ.

b. On note Δ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ induit par Δ. Déterminer son image.

Exercice 36. (CCP PC, 2016, Camille Daval)

Pour tout (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$, on pose $\mathrm{M}(a,b,c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$. On note E l'ensemble de toutes les matrices de cette forme.

1. On pose $\mathrm{J} = \mathrm{M}(0,1,0)$. Calculer J^2 puis exprimer $\mathrm{M}(a,b,c)$ en fonction de $\mathrm{I}, \mathrm{J}, \mathrm{J}^2$.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et donner sa dimension. Montrer également que E est stable par produit.

3. Vérifier que J est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et exprimer son spectre à l'aide de $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$. Trouver une base de diagonalisable pour J.

En déduire que $\mathrm{M}(a,b,c)$ est diagonalisable et trouver ses valeurs propres.

4. Montrer que les valeurs propres de $\mathrm{M}(a,b,c)$ sont réelles si, et seulement si, les coefficients b et c sont égaux.

5. On note $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme canoniquement associé à $\mathrm{M}(a,b,c)$ et on suppose que ce n'est ni l'identité ni l'application nulle.

À quelles conditions sur (a,b,c) l'endomorphisme $f_{a,b,c}$ est-il un projecteur ? Dans ce cas, préciser son noyau et son image.

Exercice 37. (CCP PC, 2016, Camille Daval)

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose qu'elle vérifie l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(2x) = x\int_0^x f(2t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x t f(2t)\,\mathrm{d}t + 1.$$

a. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et trouver une équation différentielle dont elle est solution.

b. Réciproquement, trouver toutes les fonctions vérifiant cette identité.

Exercice 38. (CCP PC, 2016, Abdeslam Mouaddib)

On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que A et B sont diagonalisables.

b. Montrer que $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ n'est pas diagonalisable.

c. On note T l'ensemble des matrices triangulaires inférieures strictes. Montrer que T est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et donner sa dimension.

d. Quelles sont les matrices de T qui sont diagonalisables ?

e. Trouver un sous-espace vectoriel non trivial de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont des matrices diagonalisables.

f. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont des matrices diagonalisables. Déterminer $\mathrm{F}\cap\mathrm{T}$. En déduire l'inégalité

$$\dim(\mathrm{F}) \leqslant \frac{n(n+1)}{2}.$$

g. Prouver que le cas d'égalité peut être réalisé.

h. Montrer que toute matrice diagonalisable appartient à un sous-espace vectoriel de dimension $n(n+1)/2$.

Exercice 39. (CCP PC, 2016, Abdeslam Mouaddib)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes réels strictement positifs, qui converge vers 0.

On pose $v_n = \displaystyle\int_0^{u_n} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3}$.

Prouver que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

Exercice 40. (Mines-Ponts PC, 2016, Abdeslam Mouaddib)

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t$.

a. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \mathrm{I}_n x^n$, noté R.

b. Y a-t-il convergence pour $x=\mathrm{R}$? pour $x=-\mathrm{R}$?

Exercice 41. (Mines-Ponts PC, 2016, Abdeslam Mouaddib)

Soient un entier $n \geqslant 2$. On pose $\omega = \exp(\mathrm{i}2\pi/n)$.

On note A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de coefficients $a_{p,q} = \omega^{(p-1)(q-1)}$.

Calculer un argument du déterminant de A.

Exercice 42. (Mines-Télécom PC, 2016, Camille Daval)

Pour tout couple (P,Q) de polynômes réels, on pose $(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)}{\sqrt{1-t^2}}$.

1. Montrer que $(\mathrm{P}|\mathrm{Q})$ est bien défini.

2. Montrer que $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire.

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on admet l'existence d'un polynôme T_n vérifiant l'identité

$$\forall\theta\in\mathbb{R},\qquad \mathrm{T}_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

Montrer que la famille $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale.

Exercice 43. (Mines-Télécom PC, 2016, Camille Daval)

Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - y. \end{cases}$

Exercice 44. (Centrale PC, 2016, Guillaume Demange)

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit k un élément non nul de $]-1,1[$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne.

Montrer qu'il existe une fonction $\mathrm{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \mathrm{F}(x+a) - k\mathrm{F}(x) = f(x).$$

Exercice 45. (Mines-Ponts PC, 2016, Thibaut Froeliger et Benoît Di Patrizio)

Une *matrice stochastique* est une matrice carrée à coefficients réels positifs telle que sur chaque ligne, la somme des coefficients soit égale à 1.

1. Soient A et B deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est stochastique.

2. Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que 1 est une valeur propre de A et que toutes les valeurs propres de A ont un module majoré par 1.

3. Montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{A}-\mathrm{I}) = \mathrm{Ker}((\mathrm{A}-\mathrm{I})^2)$.

Exercice 46. (Mines-Ponts PC, 2016, Thibaut Froeliger)

On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$.

1. Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 47. (CCP PC, 2016, Stevie Gayet)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit l'application

$$f : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{X} - 2\mathrm{tr}(\mathrm{X})\mathrm{A}$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que f est linéaire.

2. On suppose que $\mathrm{tr}(\mathrm{A})$ vaut $1/2$. Montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(\mathrm{A})$.

3. On suppose que $\mathrm{tr}(\mathrm{A})$ ne vaut pas $1/2$. Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ est trivial. Qu'en déduit-on ?

4. On revient au cas $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 1/2$. Montrer que f est un projecteur et préciser ses éléments caractéristiques.

5. On se place dans le cas $\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 1$. Montrer que f est une symétrie et préciser ses éléments caractéristiques.

6. On suppose que A n'est pas la matrice nulle. Montrer que f est diagonalisable si, et seulement si, la trace de A n'est pas nulle.

Indication : considérer le noyau de la trace.

Exercice 48. (CCP PC, 2016, Stevie Gayet)
On note $\mathrm{E} = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour toute fonction f de E, on pose

$$\mathrm{N}(f) = |f(0)| + ||f'||_\infty.$$

a. Montrer que N est une norme sur E.

b. Prouver la majoration $||f||_\infty \leqslant \mathrm{N}(f)$.

Exercice 49. (Mines-Télécom PC, 2016, Stevie Gayet)
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & -b & c \\ a & 0 & -c \\ -a & b & 0 \end{pmatrix}$.
Cette matrice est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$? dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$?

Exercice 50. (Mines-Télécom PC, 2016, Stevie Gayet)
Étudier la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos(n\pi\sqrt{n^2+n+1})$ (convergence et convergence absolue).

Exercice 51. (Mines-Ponts PC, 2016, Imane Benhayoun)
La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \exp(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$ est-elle développable en série entière ?

Exercice 52. (Mines-Ponts PC, 2016, Imane Benhayoun)
On considère dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $1, 2, \ldots, n$.

Trouver toutes les matrices qui sont semblables à A et qui commutent avec elle.

Exercice 53. (Mines-Ponts PC, 2016, Mathilde Zoch)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique.

1. Dans cette question, on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des périodes de f, noté G_f, est un fermé de $\mathbb{R}$.

2. Donner un exemple de fonction f pour lequel $\mathrm{G}_f = \mathbb{Q}$.

3. On suppose que f admet 1 et $\sqrt{2}$ comme périodes. Montrer que l'équation $f(x) = f(0)$ admet une infinité de solutions dans $]0, 1/2[$.

Exercice 54. (Mines-Ponts PC, 2016, Mathilde Zoch)
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Montrer que $\chi_\mathrm{A}(\mathrm{A})$ est la matrice nulle.

Exercice 55. (CCP PC, 2016, Julie Salme, Nathan Malnoury)
On définit une suite (P_n) de fonction sur $[0,1]$ en prenant pour P_0 la fonction $x \mapsto 1$ puis en posant, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0,1], \qquad \mathrm{P}_{n+1}(x) = \mathrm{P}_n(x) + \frac{x - \mathrm{P}_n(x)^2}{2}.$$

Pour tout x dans $[0,1]$, on définit aussi la fonction $g_x : t \mapsto t - (x - t^2)/2$.

Enfin, on définit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = g_x(u_n)$.

1. Dresser le tableau de variations de g_x sur $[0,1]$.

2. Montrer que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $[0,1]$ et que cette suite est décroissante. En déduire que cette suite converge et déterminer sa limite.

3. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver que P_n est dérivable et obtenir l'identité

$$\forall x \in [0,1], \qquad \mathrm{P}'_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{P}'_n(x)(1 - \mathrm{P}_n(x)).$$

4. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que la fonction P_n est croissante sur $[0,1]$.

5. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $[0,1]$, obtenir l'encadrement

$$0 \leqslant \mathrm{P}_n(x) - \sqrt{x} \leqslant \mathrm{P}_n(0).$$

Pour l'inégalité de droite, on procédera par récurrence.

6. Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une certaine fonction à préciser.

Exercice 56. (CCP PC, 2016, Julie Salme)
Soient a et b deux vecteurs d'un espace euclidien E. On suppose que ces deux vecteurs sont de norme 1 et qu'ils forment une famille libre.
On définit l'endomorphisme $f : x \mapsto (x|a)b + (x|b)a$ de E.

a. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

b. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 57. (CCP PC, 2016, Nathan Malnoury)
Soit un entier $n \geqslant 2$. Soit A une matrice de rang 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que 0 est une valeur propre de A.

2. Montrer que la matrice A est diagonalisable si, et seulement si, sa trace est non nulle.

Exercice 58. (Mines-Télécom PC, 2016, Nathan Malnoury)
On pose $f(x) = x^2 + \left\lfloor \dfrac{1}{1 - \lfloor x^2 \rfloor} \right\rfloor$.

a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Étudier la continuité de f en ± 1 et en $\pm\sqrt{2}$.

c. Trouver une expression simplifiée de f sur les intervalles où elle est définie.

d. Tracer le graphe de la fonction f.

Question de cours supplémentaire. Énoncer le théorème des accroissements finis.

Exercice 59. (Mines-Télécom PC, 2016, Nathan Malnoury)
On considère trois urnes. L'urne U_1 contient trois boules blanches et quatre boules noires. L'urne U_2 contient cinq boules blanches et cinq boules noires. L'urne U_3 contient quatre boules blanches et six boules noires.

On pioche une boule dans U_1 ; on note sa couleur puis on dépose cette boule dans U_2. On pioche ensuite une boule dans U_2 ; on note sa couleur puis on dépose cette boule dans U_3. On pioche enfin une boule dans U_3 et on note sa couleur.

Calculer la probabilité que les trois boules piochées soient de la même couleur.

Exercice 60. (Mines-Ponts PC, 2016, Léonor Groell)
Soient A et B deux événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose $\mathrm{Z} = \mathbb{1}_{\mathrm{A}} + \mathbb{1}_{\mathrm{B}}$.

Montrer qu'il existe k dans $[\![0, 2]\!]$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{Z} = k) \geqslant 4/9$.

Exercice 61. (Mines-Ponts PC, 2016, Léonor Groell)
Pour toute matrice symétrique réelle A, prouver l'inégalité $\mathrm{tr}(\mathrm{A})^2 \leqslant \mathrm{rg}(\mathrm{A})\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2)$.

Exercice 62. (CCP PC, 2016, Léonor Groell)
On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\mathrm{M}(x, y) = x\mathrm{A} + y\mathrm{B}$.

1. Calculer A^2 et A^3 puis A^n en général.

2. Trouver les valeurs propres de A et montrer qu'elle est diagonalisable.

3. Montrer que les vecteurs propres de A sont aussi des vecteurs propres de B. La réciproque est-elle vraie ?

4. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la matrice $\mathrm{M}(x, y)$ est diagonalisable.

5. Calculer $\mathrm{M}(x, y)^n$ en toute généralité.

Exercice 63. (CCP PC, 2016, Léonor Groell)
On définit $f : (x, y) \mapsto x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g : t \mapsto t + \exp(t - 1/t)$ sur $\mathbb{R}^*$.

Résoudre l'équation $g(t) = 0$. En déduire les points critiques de f.

Exercice 64. (Mines-Ponts PC, 2016, Julie Salme)
Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que AB soit nulle.

Montrer qu'il existe une matrice P de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$ et $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$ soient triangulaires supérieures.

Exercice 65. (Mines-Télécom PC, 2016, Barbara Freis)
Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1 - t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 66. (Mines-Télécom PC, 2016, Barbara Freis)
On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Montrer que A est trigonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ mais pas diagonalisable.

Exercice 67. (CCP PC, 2016, Barbara Freis)
Le but de cet exercice est de trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles, telles que

$$\forall x > 0, \qquad xf'(x) - |1 - f(x)| = 1.$$

1. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle $xy'(x) - y(x) = 0$.

2. On considère une solution f du problème posé en préambule.

a. Montrer que la fonction f est strictement croissante.

b. Dans cette question, on suppose que f est minorée par 1. Montrer qu'elle est solution de l'équation différentielle de la première question. Trouver la limite de f en 0 et en déduire une contradiction.

c. Dans cette question, on suppose que f est majorée par 1. Trouver une expression de f et en déduire une contradiction.

d. Conclure qu'il existe un unique x_0 de $]0,+\infty[$ tel que $f(x_0)=1$.

e. Déterminer f.

3. Trouver l'ensemble des solutions du problème posé en préambule.

Exercice 68. (CCP PC, 2016, Barbara Freis)
Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^4 - 2\mathrm{A}^3 + 2\mathrm{A}^2 = 0$.

a. Soit λ une valeur propre de A. Prouver l'égalité $\lambda^4 - 2\lambda^3 + 2\lambda^2 = 0$.

b. Calculer la trace de A.

Exercice 69. (X-ESPCI PC, 2016, Meryem Ragbaoui)
Résoudre le système

$$x+y+z=1, \qquad xyz=1, \qquad |x|=|y|=|z|=1$$

d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3$.

Exercice 70. (X-ESPCI PC, 2016, Meryem Ragbaoui)
Soit f une fonction continue et bornée sur $[0,+\infty[$.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer qu'il est possible de poser $\mathrm{A}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\frac{\mathrm{e}^{-nt}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

b. Trouver un équivalent de A_n quand n tend vers $+\infty$ dans le cas $f(0) \neq 0$.

Exercice 71. (Centrale PC, 2016, Meryem Ragbaoui)
1. On considère des polynômes unitaires $\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_{n-1}$ tels que pour tout indice k concerné, le polynôme P_k soit de degré k. Soient $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}$.
Calculer le déterminant de la matrice $(\mathrm{P}_{j-1}(a_i))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

2. Soient $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{R}$. Calculer le déterminant de la matrice $(\cos((j-1)x_i))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Exercice 72. (Centrale PC, 2016, Nathan Malnoury)
On définit les matrices

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{N} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \cdots & n \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & 0 & & \ddots & 2 \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer les inverses de ces matrices. Trouver un lien entre N et M^2.

Exercice 73. (Centrale PC, 2016, Nathan Malnoury)

On fait tourner une roue de fête foraine partagée entre quatre quarts. La probabilité que la roue dépasse le n-ième quart (sachant qu'elle a dépassé les précédents) vaut $1/n$. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de quarts de tours effectués par la roue.

On note S_n l'événement « La roue dépasse n quarts de tours. »

1. Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n)$ et en déduire la loi de X.

2. Pour chacun des quatre quarts de la roue, quelle est la probabilité que la roue s'y arrête finalement ?

Exercice 74. (Centrale PC avec Python, 2016, Nathan Malnoury)

On considère un polynôme complexe $\mathrm{P} = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k$, où n désigne le degré de P. On fait l'hypothèse $a_0 = 1$.

On note $x_1, \ldots, x_n$ les racines de P, répétées autant de fois que leur ordre de multiplicité. Pour tout m dans $\mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{S}_m = \sum_{j=1}^{n} (x_j)^m.$$

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{A}_k = \mathrm{S}_k + a_1\mathrm{S}_{k-1} + \cdots + a_{k-1}\mathrm{S}_1 + k a_k$.

1. Avec Python, coder le calcul de A_k. Calculer sa valeur sur différents exemples et en déduire une tendance.

2. On introduit $g : t \mapsto \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \mathrm{e}^{t x_j}$.

a. Trouver une relation entre g et les nombres S_m.

b. On pose $\mathscr{L}(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$ quand c'est possible.

On pose $\mathrm{M} = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Pour tout $x > \mathrm{M}$, prouver l'existence de $\mathscr{L}(g)(x)$ et calculer sa valeur.

c. Prouver l'identité $\mathscr{L}(g^{(k)})(x) = x^k \mathscr{L}(g)(x)$.

Exercice 75. (Mines-Ponts PC, 2016, Guillaume Demange)

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. Montrer la majoration $\left|\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}\right| \leqslant n$.

Exercice 76. (Mines-Ponts PC, 2016, Guillaume Demange)

On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t$.

a. Trouver l'ensemble de définition de f.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

c. Montrer que f est développable en série entière sur un intervalle à préciser.

Exercice 77. (Mines-Ponts PC, 2016, Lucas Léonard)

Calculer $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-5n+1}$.

Exercice 78. (Mines-Ponts PC, 2016, Lucas Léonard)

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $1/n$.

1. Prouver la majoration $\mathbb{P}(\mathrm{X} \geqslant n^2) \leqslant 1/n$.

2. Prouver la majoration $\mathbb{P}(|\mathrm{X}-n| \geqslant n) \leqslant 1-1/n$.

Exercice 79. (Mines-Ponts PC, 2016, Lucas Léonard)

Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E. On suppose que f préserve l'orthogonalité, ce qui s'écrit

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2, \qquad ((x|y)=0 \Rightarrow (f(x)|f(y))=0)\,.$$

Montrer qu'il existe k positif tel que $\forall x \in \mathrm{E}$, $||f(x)|| = k\,||x||$.

Exercice 80. (Mines-Télécom PC, 2016, Alice Boulanger)

On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables de Bernoulli. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on fait les hypothèses

$$\mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1}=1|\mathrm{X}_n=1)=0,2 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(\mathrm{X}_{n+1}=1|\mathrm{X}_n=0)=0,4.$$

On note $x_n = \mathbb{P}(\mathrm{X}_n=1)$.

1. Trouver une relation de récurrence entre x_{n+1} et x_n.

2. En déduire une expression de x_n.

3. Donner les valeurs de $\mathbb{E}(\mathrm{X}_n)$ et de $\mathbb{V}(x_n)$.

Exercice 81. (Mines-Télécom PC, 2016, Alice Boulanger)

Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si λ est une valeur propre réelle de A, alors λ vaut 0.

2. Montrer que la matrice $(\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)(\mathrm{A}+\mathrm{I}_n)$ est inversible.

3. On pose $\mathrm{B} = (\mathrm{A}-\mathrm{I}_n)^{-1}(\mathrm{A}+\mathrm{I}_n)$. Montrer que B est une matrice orthogonale et que $\mathrm{B}+\mathrm{I}_n$ est inversible.

Exercice 82. (CCP PC, 2016, Alice Boulanger)

Dans cet exercice, on munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Dire que f est *stabilisant* signifie qu'il vérifie l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, \qquad (f(x)|x) = ||x||^2.$$

1. On considère l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Montrer que h est stabilisant.

2. Soit f un endomorphisme stabilisant de $\mathbb{R}^3$. On pose $g = f - \mathrm{Id}$.

a. Pour tout x de $\mathbb{R}^3$, prouver l'égalité $(g(x)|x) = 0$.

b. En utilisant le polynôme caractéristique de g, prouver que g possède au moins une valeur propre.

c. Soit λ une valeur propre de g. Montrer que λ vaut 0.

3. On reprend les notations de la question 2. On suppose de plus que g n'est pas l'application nulle.

a. Pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{R}^3$, prouver l'égalité $(g(x)|y) + (g(y)|x) = 0$.

b. Montrer que $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont orthogonaux.

c. Soit e_1 un vecteur de norme 1 appartenant au noyau de g. Soit e_2 un vecteur de norme 1 appartenant à l'image de g. On pose
$$e_3 = \frac{g(e_2)}{||g(e_2)||}.$$
Montrer que la famille $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

4. On reprend les hypothèses et les notations de la question 3.

a. Montrer l'égalité $(g(e_3)|e_2) = -||g(e_2)||$.

b. Prouver l'égalité $g(e_3) = -||g(e_2)||\, e_2$.

c. En déduire la matrice de g dans la base $\mathcal{E}$.

d. Montrer que la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est antisymétrique.

5. Réciproquement, on considère un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que la matrice canoniquement associée à $f - \mathrm{Id}$ soit antisymétrique. Montrer que f est stabilisant.

Exercice 83. (CCP PC, 2016, Alice Boulanger)

Soit $p \in]0, 1[$. On considère une suite de lancers indépendants d'une pièce qui fait `pile` avec une probabilité p. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de lancers effectués au moment où apparaît le premier `pile`.

1. Donner la loi de X.

2. On se donne des variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ indépendantes de même loi que X.

On pose $\mathrm{M}_n = \min(\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n)$. Déterminer la loi de M_n.

Indication : calculer $\mathbb{P}(\mathrm{M}_n \geqslant k)$.

Exercice 84. (CCP PC, 2016, Benoît Di Patrizio)

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $0 < a < b - 1$. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes réels strictement positifs vérifiant la relation de récurrence
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{n+a}{n+b} u_n.$$

1.

a. Trouver un équivalent de $\ln((n + a)/(n + b))$ quand n tend vers $+\infty$.

b. En déduire que $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ tend vers $-\infty$ quand N tend vers $+\infty$.

c. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = n^{b-a}u_n$.

a. Montrer que la série de terme général $\ln(v_n)$ est convergente.

b. En déduire qu'il existe une constante $\mathrm{K} > 0$ telle que u_n soit équivalent à K/n^{b-a} quand n tend vers $+\infty$.

c. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.

3. Prouver l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = u_0 \times \frac{b-1}{b-a-1}.$$

Indication : simplifier les sommes

$$\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} ((n+b)u_{n+1} - (n+a)u_n) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} ((n+1)u_{n+1} - nu_n)$$

puis soustraire ces deux sommes.

Exercice 85. (CCP PC, 2016, Benoît Di Patrizio)

Pour tout couple (P,Q) d'éléments de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, on pose

$$(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1) + \mathrm{P}(2)\mathrm{Q}(2).$$

a. Prouver qu'on a alors défini un produit scalaire.

b. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 86. (Mines-Ponts PC, 2016, Benoît Di Patrizio)

On pose $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-nx^2}}{n^2}$.

1. Trouver l'ensemble de définition de f et justifier que f est continue sur cet ensemble.

2. Étudier la dérivabilité de f sur cet ensemble.

3. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 87. (X-ESPCI PC, 2016, Benoît Di Patrizio)

Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $|ab| < 1$. On définit une fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par la formule

$$f(x,y) = (x + a\sin(y), y + b\sin(x)).$$

Prouver que f est une bijection.

Exercice 88. (X-ESPCI PC, 2016, Benoît Di Patrizio)

Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E. On suppose que u est *semi-simple*, ce qui signifie que tout sous-espace vectoriel de E stable par u possède un supplémentaire dans E stable par u.

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On note v l'endomorphisme de F induit par u. Prouver que v est semi-simple.
