Chapitre 16 — fonctions à valeurs vectorielles

Dans ce chapitre, on se donne un espace vectoriel réel E de dimension finie et une fonction f définie sur un intervalle I, à valeurs dans E.

1 Continuité

Rappel : la continuité de f équivaut à celle de ses composantes relativement à une base de E.

2 Dérivabilité

Définition. Propriété : ça équivaut à la dérivabilité de ses composantes relativement à une base de E.
Vecteur vitesse, vecteur accélération.
Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, de classe $\mathcal{C}^\infty$.

3 Règles de calcul sur la dérivabilité

Si L est une application linéaire de E vers un espace vectoriel F, dérivation de $\mathrm{L} \circ f$.
Si φ est une fonction à valeurs réelles d'une variable réelle, dérivation de $f \circ \varphi$.
Si B est une application bilinéaire sur E, à valeurs dans un espace vectoriel F, dérivation de $t \mapsto \mathrm{B}(f(t), g(t))$. Cas particulier du produit scalaire.
Si M est une application p-linéaire sur $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_p$, dérivation de $t \mapsto \mathrm{M}(f_1(t), \ldots, f_p(t))$. Cas particulier du déterminant.

Exercice 1. (*) Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On définit la fonction $\varphi_\mathrm{M} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $\varphi_\mathrm{M}(t) = \mathrm{dét}(\mathrm{I}_n + t\mathrm{M})$.

Justifier que φ_M est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer $\varphi'_\mathrm{M}(0)$.

Exercice 2. (*) Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On définit la fonction

$$f : x \mapsto \begin{vmatrix} x+a_1 & x & \cdots & x \\ x & x+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & x+a_n \end{vmatrix}.$$

Exprimer la fonction f' puis la fonction f.

Exercice 3. (**) Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer l'existence de $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $t \in]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$, la matrice $\mathrm{A} + t\mathrm{M}$ soit un élément de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

b. Montrer l'existence de $\mathrm{B} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{B}^2 = \mathrm{A}$.

c. En remarquant que la matrice $\mathrm{B}^{-1}\mathrm{M}\mathrm{B}^{-1}$ est symétrique, en déduire qu'il existe une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice Q de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{B} = \mathrm{Q}\mathrm{D}\mathrm{Q}^\mathrm{T} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} = \mathrm{Q}\mathrm{Q}^\mathrm{T}.$$

d. Montrer que la fonction $\Phi : t \mapsto (\mathrm{A} + t\mathrm{M})^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\varepsilon_0, \varepsilon_0[$.

e. À l'aide de l'identité $\Phi(t) \times (\mathrm{A} + t\mathrm{M}) = \mathrm{I}_n$, obtenir une expression de la fonction Φ'.

Exercice 4. (*) Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R}))$. On suppose que M est à valeurs dans $\mathcal{O}_{2n+1}(\mathbb{R})$.

a. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les matrices $\mathrm{M}'(t)$ et $-\mathrm{M}'(t)$ sont semblables.

b. En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $\mathrm{M}'(t)$ n'est pas inversible.
