Chapitre 17 — fonctions de plusieurs variables

1 Retour sur la continuité des fonctions

1.1 Quelques exemples de limites

Chacune des fonctions suivantes est définie et continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On étudie l'existence d'une limite en l'origine.

$$f : (x,y) \mapsto \frac{x^3}{x^2+y^2} \qquad g : (x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2} \qquad h : (x,y) \mapsto \frac{x^2}{x^2+y^2} \qquad i : (x,y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

1.2 Propriétés topologiques

Soit (E,N) un espace vectoriel normé. Soit f une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$. Pour tout α réel, l'ensemble

$$\{x \in \mathrm{E}\ ;\ f(x) < \alpha\}$$

est ouvert et les ensembles

$$\{x \in \mathrm{E}\ ;\ f(x) \leqslant \alpha\} \qquad \text{et} \qquad \{x \in \mathrm{E}\ ;\ f(x) = \alpha\}$$

sont fermés.

Exemples : si E est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de E est fermé dans E ; si E est un espace préhilbertien, alors tout sous-espace vectoriel de E de dimension finie est fermé dans E.

1.3 Théorème des bornes atteintes

Soit (E,N) un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit K une partie non vide, fermée et bornée de E.
Soit $f : \mathrm{K} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

La fonction f possède alors un maximum et un minimum sur K.

Exemple : la fonction $x \mapsto (x|f(x))$ admet un maximum et un minimum sur la sphère unité d'un espace euclidien.

2 Dérivation

2.1 Dérivées partielles

Dérivée d'une fonction en un point selon un vecteur. Notation $\mathrm{D}_v f(a)$.
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles.
Notations $\partial_i f(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$: en tout point, la fonction admet des dérivées partielles d'ordre 1 selon toutes les coordonnées et les fonctions $\partial_i f$ sont toutes continues sur U. Gradient.
Stabilité par combinaison linéaire, par produit.
Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et g est une fonction d'une variable de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle qui contient $f(\mathrm{U})$, alors la fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.
Développement limité à l'ordre 1. Interprétation géométrique. Unicité du développement limité.
La classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U implique la continuité.

2.3 Différentielle

La différentielle de f au point a est la forme linéaire

$$\mathrm{d}f(a) : (h_1,\dots,h_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} h_i \times \partial_i f(a) = (\nabla f(a)|h).$$

Le nombre $\mathrm{d}f(a)(h)$ est aussi noté $\mathrm{d}f(a)\cdot h$.
Dérivée directionnelle.

2.4 Règle de la chaîne

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. Soit γ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I, à valeurs dans U. La fonction $f \circ \gamma$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, de dérivée

$$t \mapsto \mathrm{d}f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = ((\nabla f)(\gamma(t)) | \gamma'(t)) = \sum_{i=1}^{p} \partial_i f(\gamma(t)) \gamma_i'(t).$$

Dérivation de fonctions de la forme $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$.
Cas des coordonnées polaires. Expression du gradient en coordonnées polaires.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert convexe U. La fonction f est constante sur U si et seulement si son gradient est identiquement nul sur U.

2.5 Dérivées partielles d'ordre deux

Définition. Notations $\partial^2_{i,j} f$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Théorème de Schwarz.

Contre-exemple en l'absence de la classe $\mathcal{C}^2$: la fonction f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin(x/y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Expression du laplacien en coordonnées polaires.

Matrice hessienne de la fonction f en un point a, notée $\mathrm{H}_f(a)$. C'est une matrice symétrique par le théorème de Schwarz.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

$$f(a + h) = f(a) + (\nabla f(a) | h) + \frac{1}{2}(h | \mathrm{H}_f(a) h) + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h^2).$$

3 Extremums

Extremum global, extremum local.
Existence d'un extremum global d'une fonction continue sur un fermé borné.
Point critique.
Si une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ possède un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.
Minimisation des fonctions de la forme $(a, b) \mapsto ||\vec{y} - a\vec{x} - b\vec{n}||^2$. Régression linéaire.

Utilisation des coordonnées polaires : extremums de $f : (x, y) \mapsto (3x+4y)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ et de $g : (x, y) \mapsto (x^2-y^2)\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. Soit a un point critique de f dans U.

- Si la matrice $\mathrm{H}_f(a)$ est définie positive, alors la fonction f admet en a un minimum local strict.
- Si la matrice $\mathrm{H}_f(a)$ n'est pas positive, alors la fonction f n'admet pas en a un minimum local (ni global).

Cas $p = 2$: le déterminant et la trace de $\mathrm{H}_f(a)$ donnent directement le signe des valeurs propres.

Exemple de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ dans le cas $p = 3$.