Suggestions de révisions pour l'écrit

Ce document tente de donner des pistes pour optimiser le travail des différents chapitres. L'idéal est bien sûr d'être au point sur tout mais, selon votre niveau d'ambition, vous pouvez envisager de concentrer vos efforts sur certains aspects du cours et sur certains exercices emblématiques. Cette liste ne se veut pas exhaustive.

Chapitre 1 : polynômes et calcul matriciel

Être au point sur les racines de l'unité, sur les règles de calcul concernant le degré d'un polynôme et la multiplicité des racines.

Être au point sur les polynômes de Lagrange. Connaître la décomposition d'un polynôme dans une base de Lagrange et savoir démontrer ce résultat.

Savoir décomposer en éléments simples une fraction rationnelle.

Bien comprendre les diverses approches du calcul matriciel, notamment celles faisant intervenir les colonnes. Savoir utiliser un polynôme annulateur d'une matrice carrée pour calculer ses puissances.

Être au point sur la résolution des équations différentielles, y compris celles qui n'ont pas été révisées.

Comprendre qu'il y a deux sortes de développements limités : ceux avec reste en $\mathrm{o}(x^n)$ et ceux avec reste en $\mathcal{O}(x^n)$. Les premiers servent à trouver des équivalents et des limites. Les deuxièmes servent à justifier des convergences de séries ou d'intégrales.

Chapitre 2 : produits scalaires

Ce chapitre comporte une grande quantité de définitions et de propriétés de cours, qu'il faut bien assimiler, notamment les histoires de projections orthogonales et les liens entre produit matriciel et produit scalaire.

Il faut être très au point sur la définition d'un produit scalaire et les méthodes pour justifier le caractère défini positif. Il est très fréquent dans les sujets de concours qu'on demande de prouver qu'une fonction est un produit scalaire.

Les thématiques des exercices 10 et 11 sont classiques, de même que la question de minimisation des exercices 1 et 2. L'exercice 11 connaît un prolongement dans le devoir surveillé n° 2.

L'exercice 5 du devoir en temps libre 1, consacré aux polynômes de Tchebyshev, est un bon sujet de révision, pour travailler à la fois le calcul, les raisonnements sur les polynômes et les raisonnements en contexte euclidien. Idem pour les polynômes de Tchebyshev (problème 2 du devoir surveillé 1).

Chapitre 3 : séries numériques

Bien connaître les séries de référence ainsi que l'usage des critères de comparaisons. Prendre conscience de l'importance de la positivité et des valeurs absolues. Se souvenir que les critères portent sur les termes généraux et *jamais* sur les sommes partielles.

Les séries étudiées dans les exercices 1, 2 et 3 sont un bon support pour assimiler les techniques classiques d'étude de convergence (en plus des exemples du cours). Les exercices 4, 8 et 12 illustrent l'utilisation de développements limités pour l'étude de convergence — noter l'utilisation de la convergence absolue. L'exercice 4 illustre également le recours aux séries télescopiques pour prouver qu'une suite converge.

L'exercice 5 est l'occasion d'effectuer des calculs de sommes (de séries entières).

L'exercice 13 explore bien le théorème des séries alternées. On pourra le compléter avec le problème 2 du devoir surveillé 2 (piste bleue).

Les plus ambitieux tireront profit d'un nouveau coup d'œil à l'exercice 18 (transformation d'Abel).

Chapitre 4 : intégrales généralisées

Il est important de comprendre les problématiques de ce chapitre ainsi que les techniques usuelles pour les résoudre (il y a souvent des valeurs absolues, par exemple).

Tout ce qui tourne autour de la fonction Γ (exercice 3) est incontournable.

Pour assimiler les techniques usuelles d'étude de convergence dans leur diversité, les exemples du cours peuvent être complétés par les intégrales des exercices 1, 5, 6, 7, 8, 9 et 10.

Le problème II du devoir en temps libre 2 est un bon thème de révision.

Ce chapitre peut être combiné avec les chapitres 7 et 11 dans les révisions.

Chapitre 5 : espaces vectoriels normés

La priorité est de maîtriser les techniques employées pour justifier qu'une fonction est une norme (le cours contient une foule d'exemples). En particulier, j'ai bien insisté sur la manière dont on prouve des majorations sur les bornes supérieures.

Les exercices 7 et 8 montrent comment utiliser la continuité du produit matriciel. L'exercice 9 donne un exemple de convergence démontrée via une norme.

Dans la piste rouge du devoir surveillé 6, on étudie sans le dire une convergence de série matricielle. Le thème des séries vectorielles n'est pas au programme mais il peut être prolongé dans les exercices 13 et 14, que nous n'avons pas corrigé en classe.

Le problème de synthèse « Inégalités de Hölder et de Minkowski » (devoir en temps libre 3) est également représentatif de ce qui peut être posé aux concours sur ce thème.

Chapitre 6 : suites de fonctions

Il est important de bien connaître le vocabulaire (convergence simple, convergence uniforme) et de bien retenir que la norme infinie de f est la borne supérieure de $|f|$, pas de f.

Les exercices 1 et 2 sont un bon complément aux exemples du cours.

L'exercice 4 peut être profitable aux plus ambitieux.

Chapitre 7 : convergence dominée

Bien comprendre comment ce théorème s'applique et *comment on rédige son application.*

Bien comprendre comment on gère le cas où l'intervalle d'intégration est variable.

Le problème 3 du devoir surveillé 3 (piste bleue) est un exemple emblématique de ce qui peut être évalué à l'écrit.

Chapitre 8 : algèbre linéaire

Les exercices 2, 10, 11, 16, 21 et 25 constituent une bonne base [1] de révision, mais il faut bien sûr compléter cela avec les exercices vus en première année, notamment les vérifications de type « Montrer que tel ensemble est un sous-espace vectoriel de tel autre. », « Montrer que telle application est linéaire. », « Montrer que telle famille est libre. » et « Trouver le noyau et l'image de telle matrice ou application linéaire. ».

Les endomorphismes nilpotents (exercice 12) ne sont pas au programme, mais ça tombe régulièrement.

Le problème 2 du devoir surveillé 4 (piste bleue) donne un bon exemple d'aller-retour entre matrices et endomorphismes dans un contexte polynomial.

Pour aller un peu plus loin, les exercices 34 et 35 sont recommandables.

Parmi les classiques à savoir faire absolument, citons l'exercice 21, ainsi que l'exercice 8, qui est le siège de nombreuses erreurs de logique.

1. Astuce.

Chapitre 9 : réduction des matrices et des endomorphismes

Dans ce chapitre, il y a encore un peu de vocabulaire à apprendre. Surtout, il faut être au point sur les caractérisations et les correspondances entre les différents points de vocabulaire.

Attention à ne pas mélanger ce qui relève du polynôme caractéristique avec ce qui relève des polynômes annulateurs.

L'exercice 1 donne quelques exemples efficaces pour saisir en quoi consiste la diagonalisation d'une matrice de petite taille. Pour une matrice de taille quelconque et de rang petit, les exercices 2 et 4 s'imposent. L'exercice 16 résume bien comment on aborde les questions de diagonalisation dans le monde des matrices par blocs. L'exercice 6 donne un exemple de réduction d'endomorphisme où les matrices interviennent peu. Les exercices 7 et 8 illustrent bien la manière dont on gère les valeurs propres multiples.

Deux exercices à revoir pour aller plus loin : l'exercice 17, ainsi que l'exercice 1 du devoir en temps libre 4.

La trigonalisation apporte un nouvel éclairage sur la nilpotence, notamment par le biais du théorème de Cayley-Hamilton.

Chapitre 10 : séries de fonctions

Un travail linguistique s'impose : faire le tri dans tous les objets manipulés

- la fonction f_n ;
- le nombre $f_n(x)$;
- le nombre $||f_n||_\infty$;
- la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant n_0}$;
- la suite numérique $(f_n(x))_{n\geqslant n_0}$;
- la suite numérique $(||f_n||_\infty)_{n\geqslant n_0}$;
- la série de fonctions $\sum_{n\geqslant n_0} f_n$;
- la série numérique $\sum_{n\geqslant n_0} f_n(x)$;
- la série numérique $\sum_{n\geqslant n_0} ||f_n||_\infty$;
- la fonction $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n$;
- le nombre $\sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n(x)$.

Les exercices 1, 4 et 5 résument la plupart des techniques classiques à base de convergence normale et d'encadrement de sommes partielles par des intégrales.

Dans le paragraphe 2.1, j'ai donné aussi un exemple où la convergence uniforme a lieu en l'absence de convergence normale.

Comme avec les intégrales à paramètre, on applique souvent les théorèmes sur des segments pour passer finalement du local au global. Faire bien attention à effectuer ces opérations dans le bon ordre.

Attention à bien distinguer les conditions d'application des deux théorèmes d'intégration terme à terme et bien assimiler les schémas de rédaction.

Chapitre 11 : intégrales dépendant d'un paramètre

Ces quatre théorèmes sont à connaître impeccablement et je vous encourage à bien suivre les modèles de rédaction que je propose (en particulier, on donne des noms aux fonctions).

Les exemples traités en classe sont à savoir refaire.

Analyser en détail les mises en pratique sur les exemples du cours, notamment le caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la fonction Γ. Bien reconnaître les situations où l'on restreint l'intervalle des paramètres pour appliquer le théorème, avec passage du local au global à la fin du processus.

On accueillera d'un sourire l'apparition de chaque **valeur absolue**, ce qui devrait suffire à illuminer la journée.

De bons exemples de dérivation sous l'intégrale sont proposés dans le problème I du devoir surveillé 5 (piste bleue)

Chapitre 12 : dénombrabilité et sommabilité

Les principaux faits à retenir concernant la dénombrabilité sont : les exemples fondamentaux d'ensembles dénombrables ; les règles de stabilité.

Les règles de calculs sur les sommes de familles infinies fonctionnent bien dans deux cas :

- quand les termes sont tous positifs ;
- quand la famille est sommable, ce qui revient à ce que la série sous-jacente soit *absolument* convergente.

Une fois de plus, la valeur absolue est un pilier incontournable de cette aventure.

Chapitre 13 : séries entières

Ce chapitre comporte peu de définitions et de théorèmes mais il convient une fois de plus d'être parfaitement au point là-dessus. Les développements en série entière des fonctions usuelles sont à maîtriser, de même que leurs domaines de validité.

Les exercices 1, 2 et 4 donnent de bonnes bases concernant l'étude des rayons de convergence — on remarquera qu'on n'utilise que rarement la règle de d'Alembert mais plutôt les conséquences du lemme d'Abel. Côté calcul, les exercices 6, 7 et 11 sont incontournables.

Entre le devoir surveillé 6 et le devoir en temps libre 6, le matériel ne manque pas pour voir à quoi ressemble un sujet de concours avec des séries entières. Les probas en fourniront d'autres exemples.

Chapitre 14 : espaces euclidiens, suite et fin

Bien connaître la définition et les multiples caractérisations des isométries et des matrices orthogonales ainsi que les correspondances entre les deux notions. Le rôle des bases orthonormées est majeur.

Connaître la liste des isométries d'un espace de dimension 2.

Bien connaître la définition d'un endomorphisme auto-adjoint et le lien avec les matrices symétriques réelles. Le rôle des bases orthonormées est majeur.

Connaître le théorème spectral et savoir le décliner dans toutes ses variantes et comprenant bien pourquoi elles reviennent au même.

Savoir simplifier les expressions $(x|f(x))$ et $\mathrm{X}^{\mathrm{T}}\mathrm{AX}$ en passant par le théorème spectral.

Connaître la définition d'une matrice symétrique positive et sa caractérisation par les valeurs propres. Idem pour une matrice symétrique définie positive. Idem pour les endomorphismes.

Pour aller plus loin, je recommande de creuser le complément sur les racines carrées des endomorphismes auto-adjoints positifs.

Les exercices 10 et 11 sont de grands classiques, de même que le début de l'exercice 6, et l'exercice 9 dans une moindre mesure. La dernière question de l'exercice 6 est nettement plus compliquée et est réservée aux gens les plus motivés.

Le devoir en temps libre 7 donne une bonne indication sur ce qui peut être posé à l'écrit sur ce thème.

Chapitre 15 : probabilités

Il faut comprendre la place de chaque concept, afin de ne pas s'emmêler entre événements, variables aléatoires, univers et valeurs. Les schémas à base d'arbres manipulés au lycée demeurent utiles mais il ne peuvent plus suffire à justifier des calculs : il faut maintenant les formaliser au moyen des règles de calcul du cours (on exprime des relations entre événements puis on applique les règles de calcul sur les probabilités). Attention à ne pas confondre événements incompatibles et événements indépendants.

Les lois classiques sont à connaître impeccablement, de même que les propriétés générales de l'espérance (notamment la linéarité et la formule du transfert), de la variance et de la fonction génératrice.

Sur les probas infinies, l'exercice 5 fait bien travailler les opérations sur les événements (voir aussi les exemples du cours autour de la continuité décroissante).

Les exercices 10 et 11 fournissent des illustrations simples de la formule du transfert. Les exercices 15 et 16 sont des calculs incontournables sur la loi de Poisson. Les exercices 13 et 14 sont des grands classiques autour de la loi géométrique.

La formule de l'espérance totale, rencontrée dans l'exercice 12, pourrait apparaître un jour dans un sujet d'écrit.

L'exercice 4 illustre bien la diversité des usages de l'inégalité de Markov.

Le contenu du TD du mercredi 13 mars sera à mettre en top priorité pour les révisions finales.

Chapitre 16 : fonctions à valeurs vectorielles (à venir)

Comprendre comment on dérive un produit matriciel et un déterminant.

Chapitre 17 : fonctions de plusieurs variables

Bien comprendre les différentes approches des dérivées partielles, même si on utilise la plupart du temps le simple calcul formel.

Comprendre le fonctionnement de la règle de la chaîne, notamment dans le cadre d'un calcul comme celui du gradient ou du laplacien en coordonnées polaires.

Bien distinguer les notions d'extremum global et d'extremum local. Bien distinguer les deux grands théorèmes (bornes atteintes d'une part, condition nécessaire d'extremum local d'autre part) : les hypothèses ne sont pas les mêmes et les conclusions sont très différentes dans leur nature.

Bien distinguer aussi les deux conclusions du théorème sur la matrice hessienne. Ce théorème ne donne pas d'équivalence.

Comprendre aussi que certains problèmes d'optimisation ne nécessitent pas de recourir à ces théorèmes (exercices 7 et 12, distance à un sous-espace vectoriel d'un espace euclidien).

Les exercices 8, 11 et 14 sont très typiques. L'exercice 15 pourrait devenir à la mode.
