Exercice supplémentaire. **Formule de Wald (**)**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur cet espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes ayant la même loi que X. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, que l'on suppose indépendante des X_n.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $\mathrm{S}(\omega) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}(\omega)} \mathrm{X}_n(\omega) = \mathrm{S}_{\mathrm{N}(\omega)}(\omega)$.

On note en particulier que S prend la valeur 0 lorsque N vaut 0.

a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer l'ensemble $(\mathrm{S} = k)$ au moyen d'événements faisant intervenir N et certains X_n. En déduire que S est une variable aléatoire.

b. Exprimer la loi de S.

c. Pour tout $t \in [0, 1]$, montrer les égalités

$$\mathrm{G}_\mathrm{S}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{N} = n)\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) \quad \text{puis} \quad \mathrm{G}_\mathrm{S}(t) = \mathrm{G}_\mathrm{N}(\mathrm{G}_\mathrm{X}(t)).$$

d. On suppose que N et X sont d'espérance finie. Montrer alors que S est d'espérance finie et exprimer son espérance.

Exercice supplémentaire. **Formule de Wald (**)**

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur cet espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes ayant la même loi que X. On pose $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}_k$.

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, que l'on suppose indépendante des X_n.

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $\mathrm{S}(\omega) = \sum_{n=1}^{\mathrm{N}(\omega)} \mathrm{X}_n(\omega) = \mathrm{S}_{\mathrm{N}(\omega)}(\omega)$.

On note en particulier que S prend la valeur 0 lorsque N vaut 0.

a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer l'ensemble $(\mathrm{S} = k)$ au moyen d'événements faisant intervenir N et certains X_n. En déduire que S est une variable aléatoire.

b. Exprimer la loi de S.

c. Pour tout $t \in [0, 1]$, montrer les égalités

$$\mathrm{G}_\mathrm{S}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{N} = n)\mathrm{G}_{\mathrm{S}_n}(t) \quad \text{puis} \quad \mathrm{G}_\mathrm{S}(t) = \mathrm{G}_\mathrm{N}(\mathrm{G}_\mathrm{X}(t)).$$

d. On suppose que N et X sont d'espérance finie. Montrer alors que S est d'espérance finie et exprimer son espérance.