PC* — mathématiques **jeudi 28 mars 2024**
Devoir surveillé n° 7 — piste rouge **durée : 4 heures**

Problème I — problèmes de décision

Dans ce problème, on étudie deux problèmes de prise de décision inspirés de situations concrètes.

Partie I — prédire le dernier succès

Présentation. On fixe un entier n strictement positif. On répète n fois, de façon indépendante, une même expérience qui conduit à un succès avec une probabilité $p \in]0,1[$ ou à un échec avec la probabilité $1-p$.

Le jeu proposé est de deviner quand aura lieu le dernier succès. À chaque succès, on peut décider d'annoncer ou non qu'il s'agit du dernier de toute la série d'expériences. On ne peut faire qu'une annonce par partie.

Le jeu est gagné si, à l'issue des n expériences, on a fait une annonce et qu'elle s'est révélée exacte.

Le jeu est perdu si l'on n'a pas fait d'annonce ou si l'on s'est trompé en annonçant le dernier succès.

Stratégie. On choisit un entier $s \in [\![1,n]\!]$ et on laisse passer les $n-s$ premières expériences. Ensuite, dès qu'un succès se présente, on annonce que ce sera le dernier.

On note P_s la probabilité de gagner en utilisant cette stratégie.

Question 1. Montrer que cette stratégie est gagnante si, et seulement si, il y a exactement un succès lors des s dernières expériences.

Question 2. En déduire une expression de P_s en fonction de p et de s.

Question 3. Prouver l'équivalence $\dfrac{\mathrm{P}_{s+1}}{\mathrm{P}_s} \geqslant 1 \iff s \leqslant \dfrac{1}{p} - 1.$

Question 4. En déduire que la probabilité P_s est maximale pour une ou deux valeurs de s.

Question 5. Un exemple : on lance 10 fois un dé bien équilibré, et on doit prédire quand survient le dernier six. Quel choix convient-il de faire ?

Partie II — chercher une place de parking

Présentation. On est en voiture au départ d'une rue infiniment longue et à sens unique. On doit se rendre à un point d'arrivée situé à une certaine distance du point de départ et on cherche à se garer le plus près possible de l'arrivée. À partir d'où doit-on commencer à accepter une place libre ?

Mise en place. Au départ, on est au numéro 0 de la rue. Pour chaque entier naturel n, il y a une place de parking au numéro n, qui peut être libre avec la probabilité $p \in]0,1[$. On suppose que p ne dépend pas de n et que les occupations de places se font indépendamment les unes des autres. L'arrivée est au numéro d.

Stratégie. On se donne $s \in [\![0,d]\!]$ et on conduit sans s'arrêter jusqu'au numéro s de la rue. On accepte alors la première place libre à partir du numéro s (inclus).

On note X le numéro de la place trouvée par cette méthode. La distance à l'arrivée est $|\mathrm{X}-d|$ et la distance moyenne à l'arrivée est l'espérance $\mathrm{D}_s = \mathbb{E}(|\mathrm{X}-d|)$.

On admet que X est une variable aléatoire sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Question 6. Dans cette partie, on détermine la loi de X.

6.a. Déterminer l'univers-image $\mathrm{X}(\Omega)$.

6.b. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note A_k l'événement « la place au numéro k est occupée ».
Pour tout n dans $\mathrm{X}(\Omega)$, exprimer l'événement $[\mathrm{X}=n]$ en fonction des événements A_k.

6.c. Déterminer la loi de X.

6.d. Vérifier que $\mathrm{X}-s+1$ suit une loi géométrique.

6.e. En déduire l'espérance de X.

Question 7. Dans cette partie, on calcule l'espérance de D_s.

7.a. Justifier que la variable aléatoire $|\mathrm{X}-d|$ est d'espérance finie.

7.b. Établir la relation $\mathrm{D}_s = \sum\limits_{n=s}^{+\infty}(n-d)\mathbb{P}(\mathrm{X}=n) - 2\sum\limits_{n=s}^{d}(n-d)\mathbb{P}(\mathrm{X}=n)$.

7.c. Obtenir l'expression $\mathrm{D}_s = d-s+1-\dfrac{1}{p}+\dfrac{2}{p}(1-p)^{d-s+1}$.

Question 8. Dans cette partie, on cherche à minimiser D_s.

8.a. Simplifier la différence $\mathrm{D}_{s+1}-\mathrm{D}_s$.

8.b. Montrer que D_s est minimal pour le choix $s = \left\lfloor d + \dfrac{\ln(2)}{\ln(1-p)} + 1 \right\rfloor$.

8.c. Quel est le choix optimal de s dans le cas $p \geqslant 1/2$?

Question 9. On suppose qu'il y a en moyenne une place sur dix de libre. À quelle distance de l'arrivée a-t-on intérêt à commencer à chercher une place ?

On donne l'encadrement $2^{-1/6} < 0,9 < 2^{-1/7}$.

Problème II

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On fixe une variable aléatoire X sur cet espace probabilisé et on suppose que son univers image est égal à $\mathbb{N}$.

On rappelle que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, la fonction indicatrice de A est la fonction $\mathbb{1}_\mathrm{A}$ définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\mathbb{1}_\mathrm{A}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \in \mathrm{A} \\ 0 & \text{si } k \notin \mathrm{A}. \end{cases}$$

Partie I — étude de quelques variables aléatoires

Question 10. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $\mathbb{1}_\mathrm{A}(\mathrm{X})$ la variable aléatoire définie sur Ω par

$$\omega \mapsto \mathbb{1}_\mathrm{A}(\mathrm{X}(\omega)).$$

Déterminer la loi de $\mathbb{1}_\mathrm{A}(\mathrm{X})$.

Question 11. On considère un entier $n \geqslant 2$ et on se donne des variables aléatoires $\mathrm{X}_1, \dots, \mathrm{X}_n$ mutuellement indépendantes qui suivent toutes la même loi que X.

Déterminer la loi de la variable aléatoire $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{1}_\mathrm{A}(\mathrm{X}_k)$.

Question 12. Que représente la variable aléatoire de la question précédente ?

Partie II — étude d'une nouvelle variable aléatoire

Dans cette partie, on se donne une suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes, à valeurs dans $\mathbb{N}$, de même loi, ainsi qu'une variable aléatoire N à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des X_n.

Pour chaque partie A de $\mathbb{N}$, on définit une fonction T_A sur Ω en posant

$$\forall \omega \in \Omega, \qquad \mathrm{T}_\mathrm{A}(\omega) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}(\omega)} \mathbb{1}_\mathrm{A}(\mathrm{X}_i(\omega)).$$

Il s'entend que cette somme est nulle si $\mathrm{N}(\omega)$ vaut 0.

Question 13. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Prouver que T_{A} est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Question 14. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On pose $p_{\mathrm{A}} = \mathbb{P}(\mathrm{X}_1 \in \mathrm{A})$.
Pour tout k dans $\mathbb{N}$, prouver l'égalité

$$\mathbb{P}(\mathrm{T}_{\mathrm{A}} = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathrm{N} = n) \binom{n}{k} p_{\mathrm{A}}^k (1 - p_{\mathrm{A}})^{n-k}.$$

On traitement séparément le cas $k = 0$.

Question 15. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On note $\overline{\mathrm{A}}$ le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$, c'est-à-dire l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \mathrm{A}$. On note de nouveau p_{A} la probabilité de l'événement $[\mathrm{X}_1 \in \mathrm{A}]$.

15.a. Prouver l'égalité $\mathrm{T}_{\mathrm{A}} + \mathrm{T}_{\overline{\mathrm{A}}} = \mathrm{N}$.

15.b. Pour tout couple (k, ℓ) d'entiers, prouver l'égalité

$$\mathbb{P}([\mathrm{T}_{\mathrm{A}} = k] \cap [\mathrm{T}_{\overline{\mathrm{A}}} = \ell]) = \binom{k+\ell}{k} p_{\mathrm{A}}^k (1 - p_{\mathrm{A}})^{\ell}\, \mathbb{P}(\mathrm{N} = k + \ell).$$

Partie III — une caractérisation de la loi de Poisson

Dans cette partie, on reprend toutes les notations de la partie précédente.

Question 16. Dans cette question, on suppose que la variable aléatoire N suit une loi de Poisson, dont le paramètre est noté λ.

16.a. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Déterminer la loi de T_{A}.

16.b. Pour toute partie A de $\mathbb{N}$, prouver que les variables aléatoires T_{A} et $\mathrm{T}_{\overline{\mathrm{A}}}$ sont indépendantes.

Question 17. Dans cette question, on suppose que pour toute partie A de $\mathbb{N}$, les variables aléatoires T_{A} et $\mathrm{T}_{\overline{\mathrm{A}}}$ sont indépendantes. On suppose de plus que X_1 ne suit pas une loi dégénérée et que pour tout n dans $\mathbb{N}$, le nombre $\mathbb{P}(\mathrm{N} = n)$ est strictement positif.

17.a. Prouver qu'on peut choisir une partie A de $\mathbb{N}$ telle que p_{A} soit dans $]0, 1[$.

17.b. Obtenir une relation de récurrence pour la suite de terme général $\mathbb{P}(\mathrm{N} = n)$ puis prouver que N suit une loi de Poisson.
