PC* — mathématiques **jeudi 28 mars 2024**
Devoir surveillé nº 7 — piste noire **durée : 4 heures**

Partie I – étude d'une fonction de deux variables

On note U l'ouvert $]0,1[^2$ de $\mathbb{R}^2$ et on définit sur U une fonction K par la formule

$$\mathrm{K}(x,y) = x\ln\left(\frac{x}{y}\right) + (1-x)\ln\left(\frac{1-x}{1-y}\right).$$

On note $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Quand c'est pertinent, on identifie chaque élément de $\mathbb{R}^2$ avec la matrice de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ qui lui est canoniquement associée.

Question 1. Justifier rapidement que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Question 2. Vérifier que U est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Question 3. Justifier rapidement que K est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Question 4. Exprimer la dérivée partielle $\dfrac{\partial \mathrm{K}}{\partial y}$ sur U.

Question 5. Étudier le signe de cette dérivée partielle et en déduire que la fonction K admet sur U un minimum global, égal à 0.

Question 6. La fonction K est-elle majorée sur U ?

Question 7. Pour tout $(x,y) \in \mathrm{U}$, calculer la matrice hessienne de K au point (x,y), notée $\mathrm{H_K}(x,y)$.

Question 8. Pour tout $(x,y) \in \mathrm{U}$, vérifier l'inégalité $e_1^{\mathrm{T}}\mathrm{H_K}(x,y)e_1 \geqslant 4$.

Question 9. Soit $(x,y) \in \mathrm{U}$. On considère l'élément $z = (y,y)$ de U et le vecteur $w = (x-y, 0)$ de $\mathbb{R}^2$.
Justifier l'égalité

$$\mathrm{K}(x,y) = \int_0^1 (1-t)w^{\mathrm{T}}\mathrm{H_K}(z+tw)w \;\mathrm{d}t.$$

Pour cela, on pourra calculer la dérivée seconde de $t \mapsto \mathrm{K}(z+tw)$.

Question 10. En déduire l'inégalité $\mathrm{K}(x,y) \geqslant 2(x-y)^2$.

Partie II – divergence de Kullback

Dans cette partie, on considère Q et Q*, deux probabilités sur un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$. On considère une variable aléatoire X sur cet espace probabilisable et on suppose que

$$\forall x \in \mathrm{X}(\Omega), \quad \mathrm{Q}(\mathrm{X}=x)\mathrm{Q}^*(\mathrm{X}=x) > 0.$$

On suppose que les lois de X relativement aux probabilités Q et Q* sont distinctes. On note alors

$$d(\mathrm{X}) = \sum_{x\in\mathrm{X}(\Omega)} \mathrm{Q}^*(\mathrm{X}=x)\ln\left(\frac{\mathrm{Q}^*(\mathrm{X}=x)}{\mathrm{Q}(\mathrm{X}=x)}\right)$$

sous réserve que cette somme existe au sens des familles sommables.

Partie II.A – un exemple

Dans cette sous-partie uniquement, on fixe $\lambda > 0$ et $\lambda^* > 0$ *distincts* et on suppose que X suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ pour la probabilité Q, la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda^*)$ pour la probabilité Q*.

Question 11. Justifier l'existence de $d(\mathrm{X})$ et vérifier l'égalité

$$d(\mathrm{X}) = -\lambda^*\ln\left(\frac{\lambda}{\lambda^*}\right) + \lambda - \lambda^*.$$

Question 12. Préciser le signe de $d(\mathrm{X})$.

Question 13. Montrer que $d(\mathrm{X})$ est négligeable devant $\lambda - \lambda^*$ quand λ tend vers λ^*.

Partie II.B – une inégalité de convexité

Dans cette partie, on considère une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ convexe, à valeurs réelles strictement positives.

On considère une variable aléatoire réelle discrète U sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs strictement positives.

On suppose que U et $\psi(\mathrm{U})$ sont d'espérance finie.

Question 14. Justifier que $\mathbb{E}(\mathrm{U}) > 0$.

Question 15. Pour tout $x > 0$, justifier l'inégalité

$$\psi(x) \geqslant \psi(\mathbb{E}(\mathrm{U})) + \psi'(\mathbb{E}(\mathrm{U}))(x - \mathbb{E}(\mathrm{U})).$$

Question 16. En déduire *l'inégalité de Jensen*

$$\psi(\mathbb{E}(\mathrm{U})) \leqslant \mathbb{E}(\psi(\mathrm{U})).$$

Question 17. En déduire qu'en cas d'existence, le nombre $d(\mathrm{X})$ est positif.

Partie II.C – une minoration générale

Dans cette partie, on suppose que $d(\mathrm{X})$ existe.

On considère une fonction $g : \mathrm{X}(\Omega) \to \mathbb{R}$ et on pose $\mathrm{Y} = g(\mathrm{X})$.

On rappelle que pour tout $y \in \mathrm{Y}(\Omega)$, la notation $g^{-1}(y)$ désigne l'ensemble

$$\{x \in \mathrm{X}(\Omega)\ ;\ g(x) = y\}.$$

Question 18. Montrer l'inégalité

$$d(\mathrm{X}) = d(\mathrm{Y}) + \sum_{y \in \mathrm{Y}(\Omega)} \left(\mathrm{Q}^*(\mathrm{Y} = y) \sum_{x \in g^{-1}(y)} \mathrm{Q}^*_{(\mathrm{Y}=y)}(\mathrm{X} = x) \ln \left(\frac{\mathrm{Q}^*_{(\mathrm{Y}=y)}(\mathrm{X} = x)}{\mathrm{Q}_{(\mathrm{Y}=y)}(\mathrm{X} = x)} \right) \right).$$

Question 19. En déduire l'inégalité $d(\mathrm{X}) \geqslant d(\mathrm{Y})$.

On introduit maintenant l'ensemble

$$\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{X}(\Omega)\ ;\ \mathrm{Q}(\mathrm{X} = x) \leqslant \mathrm{Q}^*(\mathrm{X} = x)\}.$$

Question 20. Montrer que $\mathrm{Q}^*(\mathrm{X} \in \mathrm{B})$ et $\mathrm{Q}(\mathrm{X} \in \mathrm{B})$ appartiennent à $]0, 1[$.

Question 21. Justifier l'égalité

$$\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} |\mathrm{Q}(\mathrm{X} = x) - \mathrm{Q}^*(\mathrm{X} = x)| = 2\left(\mathrm{Q}^*(\mathrm{X} \in \mathrm{B}) - \mathrm{Q}(\mathrm{X} \in \mathrm{B})\right).$$

Question 22. Dans cette question, on suppose que g est la fonction indicatrice de B, si bien que Y est la variable de Bernoulli indicatrice de l'événement $(\mathrm{X} \in \mathrm{B})$.

Montrer alors l'égalité

$$d(\mathrm{Y}) = \mathrm{K}(\mathrm{Q}^*(\mathrm{X} \in \mathrm{B}), \mathrm{Q}(\mathrm{X} \in \mathrm{B})),$$

où K est la fonction étudiée dans la partie I.

Question 23. Démontrer finalement l'inégalité

$$d(\mathrm{X}) \geqslant \frac{1}{2} \left(\sum_{x \in \mathrm{X}(\Omega)} |\mathrm{Q}(\mathrm{X} = x) - \mathrm{Q}^*(\mathrm{X} = x)| \right)^2.$$