PC* — mathématiques **mardi 6 septembre 2016**
Corrigé du devoir surveillé n° 1

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n° 1

Exercice 1. 1. On applique la formule du binôme

$$\begin{aligned}(\mathrm{X}+\mathrm{i})^{2n+1}-(\mathrm{X}-\mathrm{i})^{2n+1} &= \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}\mathrm{i}^k\mathrm{X}^{2n+1-k}-\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(-1)^k\mathrm{i}^k\mathrm{X}^{2n+1-k}\\ &= \sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}(1-(-1)^k)\mathrm{i}^k\mathrm{X}^{2n+1-k}.\end{aligned}$$

On sait que $1-(-1)^k$ est nul si k est pair et vaut 2 si k est impair. Il reste donc uniquement les termes dont l'indice k est de la forme $2p+1$, où l'entier p varie alors entre 0 et n.

$$(\mathrm{X}+\mathrm{i})^{2n+1}-(\mathrm{X}-\mathrm{i})^{2n+1}=\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}2\mathrm{i}^{2p+1}\mathrm{X}^{2n+1-2p-1}=2\mathrm{i}\sum_{p=0}^{n}\binom{2n+1}{2p+1}(-1)^p\mathrm{X}^{2n-2p}=2\mathrm{i}\mathrm{P}_n(\mathrm{X}^2).$$

---

2. Prenons t dans l'intervalle $]0,\pi/2]$. On trouve alors

$$\mathrm{P}_n(\mathrm{cotan}^2(t))=\frac{(\mathrm{cotan}(t)+\mathrm{i})^{2n+1}-(\mathrm{cotan}(t)-\mathrm{i})^{2n+1}}{2\mathrm{i}}=\frac{(\cos(t)+\mathrm{i}\sin(t))^{2n+1}-(\cos(t)-\mathrm{i}\sin(t))^{2n+1}}{2\mathrm{i}\sin^{2n+1}(t)}$$

puis

$$\mathrm{P}_n(\mathrm{cotan}^2(t))=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2n+1)t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2n+1)t}}{2\mathrm{i}}\times\frac{1}{\sin^{2n+1}(t)}=\frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}.$$

---

3. Soit $k\in[\![1,n]\!]$. Le nombre $\frac{k\pi}{2n+1}$ est alors dans $]0,\pi/2]$. Appliquons-lui la formule de la question précédente

$$\mathrm{P}_n(\mathrm{cotan}^2(\frac{k\pi}{2n+1}))=\frac{\sin(k\pi)}{\sin^{2n+1}(k\pi/(2n+1))}=0.$$

Un calcul donne

$$\forall t\in]0,\pi[,\qquad \mathrm{cotan}'(t)=\frac{-\sin^2(t)-\cos^2(t)}{\sin^2(t)}=-\frac{1}{\sin^2(t)}<0.$$

La fonction cotangente est donc strictement décroissante sur $]0,\pi/2$. On en déduit les inégalités

$$\mathrm{cotan}\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)>\mathrm{cotan}\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)>\cdots>\mathrm{cotan}\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right)\geqslant\mathrm{cotan}(\pi/2)=0$$

puis

$$\mathrm{cotan}^2\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)>\mathrm{cotan}^2\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)>\cdots>\mathrm{cotan}^2\left(\frac{n\pi}{2n+1}\right).$$

Ainsi, les nombres $\mathrm{cotan}^2(k\pi/(2n+1))$, pour k variant de 1 à n, sont n racines distinctes de P_n. Ce polynôme est de degré n, donc ce sont ses seules racines.

---

4. Les termes en X^n et en X^{n-1} de P_n s'écrivent

$$\binom{2n+1}{1}X^n \qquad \text{et} \qquad -\binom{2n+1}{3}X^{n-1}.$$

La somme des racines de ce polynôme vaut donc

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{\binom{2n+1}{3}}{\binom{2n+1}{1}} = \frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} \times \frac{1}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

5.a. On définit sur $[0, \pi/2]$ la fonction $g : t \mapsto \sin(t) - t$. Cette fonction est dérivable, avec

$$\forall t \in [0, \pi/2], \qquad g'(t) = \cos(t) - 1 \leqslant 0.$$

La fonction g est donc décroissante sur l'intervalle $[0, \pi/2]$. L'égalité $g(0) = 0$ permet d'en déduire que la fonction g est négative sur cet intervalle. On obtient donc

$$\forall t \in [0, \pi/2], \qquad \sin(t) \leqslant t.$$

5.b. Pour tout t dans l'intervalle $]0, \pi/2]$, écrivons $\varphi(t) = t\cos(t)/\sin(t)$. Par dérivation d'un quotient, il vient

$$\forall t \in]0, \pi/2], \qquad \varphi(t) = \frac{\sin(t)(\cos(t) - t\sin(t)) - t\cos(t)\cos(t)}{\sin^2(t)} = \frac{\sin(t)\cos(t) - t}{\sin^2(t)}.$$

5.c. Soit t dans $]0, \pi/2]$. On connaît les inégalités $0 \leqslant \sin(t) \leqslant t$ et $0 \leqslant \cos(t) \leqslant 1$ donc

$$\cos(t)\sin(t) \leqslant t, \qquad \text{donc} \qquad \varphi'(t) \leqslant 0.$$

La fonction φ est donc décroissante sur $]0, \pi/2]$. On trouve par ailleurs $\varphi(\pi/2) = 0$ et

$$\varphi(t) = \frac{t\cos(t)}{\sin(t)} \sim \frac{t \times 1}{t} = 1 \qquad \text{quand } t \text{ tend vers } 0.$$

On en déduit que $\varphi(t)$ tend vers 1 quand t tend vers 0.

---

6. Soit t dans $]0, \pi/2]$. Les variations de la fonction φ donnent

$$0 \leqslant t\operatorname{cotan}(t) \leqslant 1, \qquad \text{donc} \qquad \operatorname{cotan}^2(t) \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

Par ailleurs, on trouve

$$\operatorname{cotan}^2(t) + 1 = \frac{\cos^2(t) + \sin^2(t)}{\sin^2(t)} = \frac{1}{\sin^2(t)}.$$

L'inégalité $0 < \sin(t) \leqslant t$ donne alors

$$\frac{1}{\sin^2(t)} \geqslant \frac{1}{t^2} \qquad \text{puis} \qquad \operatorname{cotan}^2(t) \geqslant \frac{1}{t^2} - 1.$$

---

7. Des questions précédentes, on tire l'encadrement
$$\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}-n\leqslant\frac{n(2n-1)}{3}\leqslant\frac{(2n+1)^2}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$
puis
$$\frac{\pi^2}{3}\times\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\leqslant\frac{\pi^2}{3}\times\frac{n(2n-1)}{(2n+1)^2}+\frac{n\pi^2}{(2n+1)^2}.$$
Cet encadrement est valable pour tout entier n strictement positif. Le majorant et le minorant tendent tous deux vers $\pi^2/6$ quand n tend vers $+\infty$. Le principe des gendarmes donne donc
$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2. 1. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons T_n l'énoncé
$$\forall x\in[0,\mathrm{R}[,\qquad f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{d}t.$$
L'énoncé T_0 s'écrit
$$\forall x\in[0,\mathrm{R}[,\qquad f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\ \mathrm{d}t.$$
Cet énoncé est vrai : c'est le théorème fondamental de l'intégration.

Soit n dans $\mathbb{N}$. On suppose que l'énoncé T_n est vrai. Prenons x dans $[0,\mathrm{R}[$. On connaît donc l'égalité
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{d}t.$$
Dans le reste intégral, effectuons une intégration par parties. La fonction $t\mapsto f^{(n+1)}(t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée est $t\mapsto f^{(n+2)}(t)$. La fonction $t\mapsto(x-t)^n/n!$ admet pour primitive la fonction $t\mapsto-(x-t)^{n+1}/(n+1)!$, qui est de classe $\mathcal{C}^1$. On obtient
$$\begin{aligned}\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\ \mathrm{d}t&=\left[-f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_{t=0}^{t=x}+\int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ \mathrm{d}t\\&=f^{(n+1)}(0)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}+\int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ \mathrm{d}t.\end{aligned}$$
En reportant cette formule dans T_n, on obtient
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n+1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x f^{(n+2)}(t)\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\ \mathrm{d}t.$$
L'énoncé T_{n+1} est alors démontré. Ainsi, par récurrence, on a prouvé la formule de Taylor avec reste intégral en toute généralité.

2.a. Soit t dans $[0,x]$. On connaît les inégalités $0\leqslant t\leqslant x<r$ donc $x-t\geqslant 0$ et $r-t>0$ donc
$$\frac{x-t}{r-t}\geqslant 0.$$
Par ailleurs, un calcul donne
$$\frac{x}{r}-\frac{x-t}{r-t}=\frac{x(r-t)-r(x-t)}{r(r-t)}=\frac{t(r-x)}{r(r-t)}.$$
Les nombres $r-x$ et t sont positifs. Les nombres r et $r-t$ sont strictement positifs. On obtient donc
$$\frac{t(r-x)}{r(r-t)}\geqslant 0\qquad\text{puis}\qquad\frac{x-t}{r-t}\leqslant\frac{x}{r}.$$

2.b. Soit n dans $\mathbb{N}$. Soit t dans $[0, x]$. On connaît les inégalités

$$f^{(n+1)}(t) \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant x - t \leqslant \frac{x}{r}(r-t)$$

donc

$$f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^n f^{(n+1)}(t)\frac{(r-t)^n}{n!}.$$

Par croissance de l'intégrale, il vient

$$\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^n \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(r-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

La relation de Chasles donne ensuite

$$\int_0^r f^{(n+1)}(t)\frac{(r-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t = \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(r-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t + \int_x^r f^{(n+1)}(t)\frac{(r-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

Cette dernière intégrale est positive car l'intégrande est une fonction positive et les bornes sont dans l'ordre croissant. On obtient donc

$$\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(r-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^r f^{(n+1)}(t)\frac{(r-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

puis

$$\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^n \int_0^r f^{(n+1)}(t)\frac{(r-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

2.c. Soit n dans $\mathbb{N}$. La formule de Taylor avec reste intégral donne

$$f(r) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}r^k + \int_0^r f^{(n+1)}(t)\frac{(r-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

Les nombres $f^{(k)}(0)r^k/k!$ sont tous positifs donc

$$f(r) \geqslant \int_0^r f^{(n+1)}(t)\frac{(r-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

puis, par positivité de $(x/r)^n$, on obtient finalement

$$\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^n f(r).$$

2.d. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on peut écrire

$$0 \leqslant \int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t \leqslant \left(\frac{x}{r}\right)^n f(r).$$

On connaît l'encadrement $0 \leqslant x/r < 1$. On en déduit que $(x/r)^n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par le principe des gendarmes, on en déduit que le reste intégral

$$\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t$$

tend vers 0 quand l'entier n tend vers $+\infty$. On a alors prouvé que la série $\sum_{k\geqslant 0} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$ est convergente et que sa somme vaut $f(x)$.

3.a. Les dérivées d'ordre pair de la fonction ch sont égales à la fonction ch, qui est positive sur $\mathbb{R}$ donc sur $[0,+\infty[$. Idem pour les dérivées d'ordre impair de la fonction sh.

Les dérivées d'ordre impair de la fonction ch sont égales à la fonction sh, qui est positive sur $[0,+\infty[$. Idem pour les dérivées d'ordre pair de la fonction sh.

Ainsi, toutes les dérivées successives des fonctions ch et sh sont positives sur $[0,+\infty[$.

3.b. Pour tout p dans $\mathbb{N}$, on obtient

$$\mathrm{ch}^{(2p)}(0) = \mathrm{ch}(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ch}^{(2p+1)}(0) = \mathrm{sh}(0) = 0$$

et

$$\mathrm{sh}^{(2p)}(0) = \mathrm{sh}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}^{(2p+1)}(0) = \mathrm{ch}(0) = 1.$$

En reportant dans l'identité démontrée à la question 2, on obtient pour tout x dans $[0,+\infty[$ les égalités

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

3.c. La fonction ch est paire et la fonction sh est impaire. Prenons x négatif. On trouve alors

$$\mathrm{ch}(x) = \mathrm{ch}(-x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-x)^{2p}}{(2p)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

et

$$\mathrm{sh}(x) = -\,\mathrm{sh}(-x) = -\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-x)^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Les formules de la question 3.b sont donc valables pour tout x réel.

3.d. Soit x réel. On peut écrire

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

4.a. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons D_n l'énoncé ≪ il existe un polynôme réel vérifiant l'identité

$$\forall x \in [0,\pi/2[, \qquad \tan^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n(\tan(x)),$$

ayant tous ses coefficients positifs. ≫

L'énoncé D_0 est vrai : il suffit de prendre $\mathrm{P}_0 = \mathrm{X}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que l'énoncé D_n est vrai. Il existe donc un polynôme réel P_n à coefficients positifs qui vérifie l'identité

$$\forall x \in [0,\pi/2[, \qquad \tan^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n(\tan(x)).$$

Dérivons cette identité

$$\forall x \in [0,\pi/2[, \qquad \tan^{(n+1)}(x) = (1+\tan^2(x))\mathrm{P}_n'(\tan(x)).$$

Posons alors $P_{n+1} = (X^2+1)P'_n$. Le polynôme P_{n+1} vérifie bien l'identité

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \qquad \tan^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(\tan(x)).$$

Pour prouver que ses coefficients sont positifs, introduisons une notation pour les coefficients de P_n

$$P_n = \sum_{k=0}^{s} a_k X^k,$$

où l'on a noté s le degré du polynôme P_n (on pourrait vérifier que ce degré vaut $n+1$ mais ça n'a pas d'intérêt ici). Les nombres a_k sont tous positifs (au sens large).

On obtient

$$P_{n+1} = (X^2+1)\sum_{k=1}^{s} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=1}^{s} a_k (X^{k+1} + X^{k-1}).$$

Cette égalité prouve que les coefficients de P_{n+1} sont positifs. L'énoncé D_{n+1} est donc vrai.

Par récurrence, l'énoncé D_n est vrai pour tout entier n.

4.b. Soit n dans $\mathbb{N}$. Reprenons la notation

$$P_n = \sum_{k=0}^{s} a_k X^k,$$

où les coefficients a_k sont tous positifs. Prenons x dans $[0, \pi/2[$. Le nombre $\tan(x)$ est positif donc

$$\tan^{(n)}(x) = P_n(\tan(x)) = \sum_{k=0}^{s} a_k \tan^k(x) \geqslant 0.$$

La fonction tangente vérifie donc les hypothèses de ce problème sur l'intervalle $[0, \pi/2[$. On peut donc écrire

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \qquad \tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

La fonction tangente est impaire donc ses dérivées d'ordre pair sont des fonctions impaires, qui s'annulent donc en 0. Il reste

$$\forall x \in [0, \pi/2[, \qquad \tan(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\tan^{(2p+1)}(0)}{(2p+1)!} x^{2p+1}.$$

Le caractère impair de la fonction tangente permet d'appliquer le même raisonnement que pour la fonction sh ci-dessus et d'obtenir finalement l'identité ci-dessus pour tout x dans l'intervalle $]-\pi/2, \pi/2[$.

Remarque culturelle. On peut prouver plus précisément l'identité

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \qquad \tan(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} |B_{2n}(0)| \frac{4^n(4^n-1)}{(2n)!} x^{2n-1},$$

où B_{2n} désigne le polynôme de Bernoulli de rang $2n$, que nous avons rencontré dans le devoir en temps libre n° 1.

Exercice 3. a. Notons α le coefficient dominant du polynôme P. L'hypothèse $r = 1$ donne l'égalité

$$\mathrm{P} = \alpha(\mathrm{X} - a_1)^n \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{P}' = \alpha n(\mathrm{X} - a_1)^{n-1}.$$

Le polynôme P′ est donc scindé.

---

b. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$, à valeurs réelles. On fait l'hypothèse $f(a) = f(b)$.

Alors il existe c dans $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

---

c. On applique le théorème de Rolle à la fonction P sur les segments $[a_1, a_2], \dots, [a_{r-1}, a_r]$. On obtient l'existence de

$$b_1 \in\,]a_1, a_2[, \quad \dots \quad , b_{r-1} \in\,]a_{r-1}, a_r[$$

tels que $\mathrm{P}'(b_1), \dots, \mathrm{P}'(b_{r-1})$ soient nuls. Par construction, on observe les inégalités

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_{r-1} < b_{r-1} < a_r.$$

En particulier, les nombres $b_1, \dots b_{r-1}$ sont distincts. De plus, ce sont des racines de P′ mais pas de P car ils sont distincts des a_k.

---

d. Soit x une racine de P. L'ordre de multiplicité de x en tant que racine de P est le plus grand des entiers k tels que $(\mathrm{X} - x)^k$ divise P. On peut aussi dire que c'est l'unique entier m tel que $(\mathrm{X} - x)^m$ divise P et $(\mathrm{X} - x)^{m+1}$ ne divise pas P.

Notons que l'extension de la définition proposée par l'énoncé est cohérente avec ce qu'on vient de rappeler, puisque si x n'est pas une racine de P, alors P est divisible par $(\mathrm{X} - x)^0$ mais pas par $(\mathrm{X} - x)^1$.

---

e. Soit x une racine de P. Soit $m \in \mathbb{N}$. L'ordre de multiplicité de x en tant que racine de P vaut m si, et seulement si,

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!], \quad \mathrm{P}^{(k)}(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}^{(m)}(x) \neq 0.$$

Une autre façon de formuler cette caractérisation est de dire que la multiplicité de x en tant que racine de P est le plus petit des entiers k pour lesquels $\mathrm{P}^{(k)}(x)$ est non nul. On observe alors que cette caractérisation est encore valable pour multiplicité 0 évoquée dans l'énoncé.

---

f. On connaît les formules

$$\forall k \in [\![0, m-1]\!], \quad \mathrm{P}^{(k)}(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{P}^{(m)}(x) \neq 0$$

donc

$$\forall j \in [\![0, m-2]\!], \quad (\mathrm{P}')^{(j)}(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{P}')^{(m-1)}(x) \neq 0.$$

On en déduit que $m - 1$ est l'ordre de multiplicité de x en tant que racine de P′ (c'est vrai même dans le cas $m = 1$, cas où x n'est pas une racine de P′).

---

g. Notons $m_1, \ldots, m_r$ les ordres de multiplicité respectifs des racines $a_1, \ldots, a_r$ de P. D'après les conclusions des questions c et f, on peut affirmer que le polynôme P′ est divisible par le polynôme Q défini par

$$\mathrm{Q} = (\mathrm{X} - b_1) \cdots (\mathrm{X} - b_{r-1})(\mathrm{X} - a_1)^{m_1 - 1} \cdots (\mathrm{X} - a_r)^{m_r - 1}.$$

Le degré de Q est donné par

$$\deg(\mathrm{Q}) = (r-1) + \sum_{i=1}^{r} (m_i - 1) = -1 + \sum_{i=1}^{r} m_i = -1 + \deg(\mathrm{P}) = n - 1 = \deg(\mathrm{P}').$$

Le coefficient dominant de P′ est αn donc on obtient

$$\mathrm{P}' = \alpha n (\mathrm{X} - b_1) \cdots (\mathrm{X} - b_{r-1})(\mathrm{X} - a_1)^{m_1 - 1} \cdots (\mathrm{X} - a_r)^{m_r - 1}.$$

Le polynôme P′ est scindé.

---

h. Puisque x est une racine commune de P′ et P″, c'est une racine multiple de P′. Or on a vu à la question précédente que les b_k sont des racines simples de P′. On en déduit que x est l'un des a_k. C'est donc une racine de P.

Remarques en passant. Tout cet exercice repose sur le théorème de Rolle, qui est caractéristique des fonctions à valeurs réelles. Bien sûr, si on se place dans le monde des polynômes complexes, tous les polynômes sont scindés donc il n'y a rien à faire.

Pour ce qui est de la dernière question, on peut observer que dans le cas du polynôme $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 + 1$, les polynômes $\mathrm{P}' = 3\mathrm{X}^2$ et $\mathrm{P}'' = 6\mathrm{X}$ possède la racine commune 0 mais que ce n'est pas une racine de P. Ce n'est pas un contre-exemple puisque P n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. a. Pour tout x dans $[0,1]$, posons

$$g(x) = 2x^2 - f(x) \qquad \text{et} \qquad h(x) = f(x) - 1 + 2(1-x)^2.$$

La fonction g est de classe $\mathcal{C}^2$ et on trouve

$$\forall x \in [0,1], \qquad g'(x) = 4x - f'(x)$$

puis

$$\forall x \in [0,1], \qquad g''(x) = 4 - f''(x) > 0.$$

La fonction g' est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$. L'égalité $g'(0) = 0$ permet d'en déduire que la fonction g' est positive sur $[0,1]$ et qu'elle s'annule seulement en 0. Par conséquent, la fonction g est strictement croissante sur $[0,1]$. On obtient en particulier

$$\forall x \in]0,1], \qquad g(x) > g(0) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad f(x) < 2x^2.$$

La fonction h est de classe $\mathcal{C}^2$ et on trouve

$$\forall x \in [0,1], \qquad h'(x) = f'(x) - 4(1-x)$$

puis

$$\forall x \in [0,1], \qquad h''(x) = f''(x) + 4 > 0.$$

La fonction h' est donc strictement croissante sur l'intervalle $[0,1]$. L'égalité $h'(1) = 0$ permet d'en déduire que la fonction h' est négative sur $[0,1]$ et qu'elle s'annule seulement en 1. Par conséquent, la fonction h est strictement décroissante sur $[0,1]$. On obtient en particulier

$$\forall x \in [0,1[, \qquad h(x) > h(1) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad f(x) > 1 - 2(1-x)^2.$$

En particulier, les deux inégalités sont valables simultanément pour tout x dans $]0,1[$.

---

b. On obtient en particulier les inégalités $f(1/2) < 1/2$ et $f(1/2) > 1 - 1/2 = 1/2$.

---

c. Les deux inégalités de la question précédente sont incompatibles. L'hypothèse

$$\forall x \in [0,1], \qquad \left|f''(x)\right| < 4$$

est donc fausse. On en déduit qu'il existe c dans $[0,4]$ tel que $|f''(c)| \geqslant 4$.

Exercice 5. 1.a. Soit (x_1, x_2) un élément de $[0,+\infty[^2$.

$$\frac{x_1+x_2}{2} - (x_1x_2)^{1/2} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right)^2 \geqslant 0.$$

L'énoncé AG(2) est démontré.

1.b. Soit $(x_1, \dots, x_{2n})$ un élément de $[0,+\infty[^{2n}$. Une application de AG(2) donne

$$(x_1\cdots x_{2n})^{1/(2n)} = \Big((x_1\cdots x_n)^{1/n} \times (x_{n+1}\cdots x_{2n})^{1/n}\Big)^{1/2} \leqslant \frac{(x_1\cdots x_n)^{1/n} + (x_{n+1}\cdots x_{2n})^{1/n}}{2}.$$

Appliquons maintenant AG(n) deux fois

$$(x_1\cdots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \qquad \text{et} \qquad (x_{n+1}\cdots x_{2n})^{1/n} \leqslant \frac{x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{n}.$$

En combinant toutes ces inégalités, on obtient l'inégalité attendue

$$(x_1\cdots x_{2n})^{1/(2n)} \leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n+x_{n+1}+\cdots+x_{2n}}{2n}.$$

On a prouvé que AG(n) implique AG($2n$).

1.c. Une mise en facteur donne

$$(x_1\cdots x_{n-1})^{1/(n-1)} = (x_1\cdots x_{n-1})^{1/n} \times (x_1\cdots x_{n-1})^{\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}} = (x_1\cdots x_{n-1})^{1/n} \times (x_1\cdots x_{n-1})^{1/(n(n-1))}.$$

Ainsi, il suffit de poser $x_n = (x_1\cdots x_{n-1})^{1/(n-1)}$ pour avoir

$$(x_1\cdots x_{n-1})^{1/(n-1)} = (x_1\cdots x_n)^{1/n}.$$

Attention. Il s'agit bien de trouver une condition suffisante et non une condition nécessaire. Il n'y a d'ailleurs pas unicité de la solution dans le cas où $x_1\cdots x_{n-1}$ est nul.

1.d. Soit $(x_1, \dots, x_{n-1})$ un élément de $[0,+\infty[^{n-1}$. On pose

$$x_n = (x_1\cdots x_{n-1})^{1/(n-1)},$$

ce qui est un nombre positif. L'inégalité AG(n), dont l'énoncé a supposé qu'elle est vraie, donne alors

$$(x_1\cdots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1+\cdots+x_{n-1}+x_n}{n},$$

c'est-à-dire, en utilisant le calcul de la question précédente,

$$(x_1 \cdots x_{n-1})^{1/(n-1)} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1} + (x_1 \cdots x_{n-1})^{1/(n-1)}}{n}.$$

Multiplions par n, qui est positif, et faisons passer $(x_1 \cdots x_{n-1})^{1/(n-1)}$ à gauche

$$(x_1 \cdots x_{n-1})^{1/(n-1)} \times (n-1) \leqslant x_1 + \cdots + x_{n-1}.$$

Il n'y a plus qu'à diviser par $n-1$, qui est strictement positif, pour obtenir

$$(x_1 \cdots x_{n-1})^{1/(n-1)} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}.$$

On a prouvé que AG(n) implique AG($n-1$).

1.e. Les résultats des questions 1.a et 1.b permettent de justifier par récurrence que pour tout p dans $\mathbb{N}^*$, l'énoncé AG(2^p) est vrai. Le résultat de la question 1.d permet d'en déduire (par une récurrence descendante) que pour tout entier p, pour tout entier k dans $[\![2, 2^p]\!]$, l'énoncé AG(k) est vrai.

Au final, pour tout entier $k \geqslant 2$, l'énoncé AG(k) est vrai.

2.a. Pour tout $t > 0$, on pose $f(t) = \ln(t) - t + 1$. La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec

$$\forall t > 0, \qquad f'(t) = \frac{1}{t} - 1 = \frac{1-t}{t}.$$

On observe que $f'(t)$ est positif si $t \leqslant 1$ et négatif si $t \geqslant 1$. On en déduit que la fonction f est croissante sur l'intervalle $]0, 1]$ et décroissante sur l'intervalle $[1, +\infty[$. Elle atteint donc un maximum en 1.

On trouve $f(1) = 0$ donc f est à valeurs négatives

$$\forall t > 0, \qquad \ln(t) \leqslant t - 1.$$

Enfin, on remarque que la fonction f' s'annule seulement en 1 donc les variations de f sont strictes. La fonction f s'annule donc seulement en 1.

Autrement dit, l'égalité $\ln(t) = t - 1$ équivaut à $t = 1$.

2.b. On applique le logarithme au produit $y_1 \cdots y_n$ puis on utilise l'inégalité de la question précédente.

$$0 = \ln(y_1 \cdots y_n) = \ln(y_1) + \cdots \ln(y_n) \leqslant y_1 - 1 + \cdots + y_n - 1 = (y_1 + \cdots + y_n) - n.$$

On en tire l'inégalité attendue

$$1 \leqslant \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n}.$$

2.c. Notons $\mu = (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$ et posons

$$y_1 = \frac{x_1}{\mu}, \qquad \ldots, \qquad y_n = \frac{x_n}{\mu}.$$

Les nombres $y_1, \ldots, y_n$ sont alors strictement positifs et leur produit vaut 1. L'inégalité de la question précédente s'écrit alors

$$1 \leqslant \frac{(x_1/\mu) + \cdots + (x_n/\mu)}{n},$$

c'est-à-dire

$$\mu \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},$$

c'est-à-dire

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

2.d. Soient $x_1, \ldots, x_n$ dans $[0, +\infty[$. Si tous ces nombres sont strictement positifs, alors le calcul de la question précédente donne l'inégalité attendue

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leqslant \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Si l'un d'entre eux est nul, alors cette inégalité est encore valable car le membre de gauche est nul et celui de droite est positif.

On a prouvé AG(n) en toute généralité.

2.e. On suppose que $x_1, \ldots, x_n$ sont égaux entre eux. Alors les deux membres de l'inégalité valent x_1 donc le cas d'égalité est réalisé.

Réciproquement, on suppose que l'égalité

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

est réalisée.

Premier cas. On suppose que $x_1 + \cdots + x_n$ est nul. C'est alors une somme nulle de nombres positifs donc tous les x_k sont nuls. En particulier, ils sont égaux entre eux.

Deuxième cas. On suppose que $x_1 + \cdots + x_n$ est strictement positif. On en déduit que $x_1 \cdots x_n$ est strictement positif aussi. Les x_k sont donc tous strictement positifs.
Posons $\mu = (x_1 \cdots x_n)^{1/n}$ puis

$$y_1 = \frac{x_1}{\mu}, \qquad \ldots \qquad , y_n = \frac{x_n}{\mu}.$$

En remontant le raisonnement qui a mené à l'inégalité, on obtient

$$1 = \frac{y_1 + \cdots + y_n}{n} \qquad \text{puis} \qquad \sum_{k=1}^{n} (\ln(y_k) - y_k + 1) = 0.$$

La dernière expression est une somme nulle de nombres négatifs, donc tous ses termes sont nuls. On obtient donc

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad \ln(y_k) = y_k - 1.$$

D'après le cas d'égalité de la question 2.a, les y_k sont tous égaux à 1. On en déduit que les x_k sont tous égaux à μ, donc tous égaux entre eux.

On a prouvé que dans tous les cas, l'égalité implique que les x_k soient tous égaux entre eux.

Par double implication, le cas d'égalité de AG(n) équivaut à ce que tous les x_k soient égaux entre eux.
