Problème I — polynômes de Bernoulli

Question 1. Soit P un polynôme réel. Montrer qu'il existe un unique polynôme réel Q vérifiant les relations

$$\mathrm{Q}' = \mathrm{P} \qquad\qquad \int_0^1 \mathrm{Q}(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

On définit donc de manière unique une suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes réels par les conditions

$$\mathrm{B}_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{B}_n' = n\mathrm{B}_{n-1}, \qquad \int_0^1 \mathrm{B}_n(t)\ \mathrm{d}t = 0.$$

De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $b_n = \mathrm{B}_n(0)$.

Question 2. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que le polynôme B_n est unitaire, de degré n.

Question 3. Déterminer les polynômes $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3$.

Question 4. Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer l'égalité $\mathrm{B}_n(1) = \mathrm{B}_n(0)$.

Question 5. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer l'égalité

$$\mathrm{B}_n(1-\mathrm{X}) = (-1)^n \mathrm{B}_n(\mathrm{X}).$$

Pour cela, on pourra montrer que la suite de polynômes $((-1)^n\mathrm{B}_n(1-\mathrm{X}))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les mêmes relations que la suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Question 6. En déduire que b_n est nul pour tout entier impair $n \geqslant 3$.

Question 7. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer l'égalité

$$\mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k\, \mathrm{X}^{n-k}.$$

Question 8. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{Q}_n = \mathrm{B}_n + \dfrac{n}{2}\,\mathrm{X}^{n-1}$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, montrer l'égalité $\mathrm{Q}_n(-\mathrm{X}) = (-1)^n\mathrm{Q}_n(\mathrm{X})$.

Question 9. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, en déduire les égalités

$$\mathrm{B}_n(-\mathrm{X}) = (-1)^n(\mathrm{B}_n(\mathrm{X}) + n\mathrm{X}^{n-1}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B}_n(\mathrm{X}+1) - \mathrm{B}_n(\mathrm{X}) = n\mathrm{X}^{n-1}.$$

Question 10. Pour tout (p, n) dans $(\mathbb{N}^*)^2$, on pose

$$\mathrm{S}_n(p) = \sum_{k=1}^{p} k^n.$$

Exprimer la somme $\mathrm{S}_n(p)$ au moyen du polynôme B_{n+1}.
En déduire que la fonction $p \mapsto \mathrm{S}_n(p)$ est polynomiale.
On note encore S_n le polynôme auquel cette fonction est associée.

Question 11. Préciser les polynômes S_1 et S_2 puis factoriser ces polynômes.

Question 12. Pour tout entier pair $n \geqslant 2$, montrer que le polynôme S_n est divisible par $\mathrm{X}(\mathrm{X}+1)(2\mathrm{X}+1)$.

Question 13. Pour tout entier impair $n \geqslant 3$, montrer que le polynôme S_n est divisible par X^2 et par $(\mathrm{X}+1)^2$.

En déduire le polynôme S_3.

Problème II — dérivée symétrique

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Dire que f *admet une dérivée symétrique* en x_0 signifie que le quotient

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

possède une limite finie lorsque h tend vers 0. En cas d'existence, cette limite est notée $f'_s(x_0)$.

Question 14. On suppose que la fonction f admet en x_0 des dérivées à gauche et à droite.
Montrer alors que la fonction f admet une dérivée symétrique en x_0 et exprimer $f'_s(x_0)$ en fonction des nombres $f'_g(x_0)$ et $f'_d(x_0)$.

Question 15. On suppose que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Montrer alors que la fonction f admet en tout point de $\mathbb{R}$ une dérivée symétrique. Montrer de plus que la fonction f'_s est continue.

Question 16. Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f possède en tout point de $\mathbb{R}$ une dérivée symétrique.
Montrer alors que $f'_s(x_0)$ est positif pour tout x_0 réel.

Le but des dernières questions de ce problème est de prouver une sorte de réciproque du résultat précédent.

Question 17. On se donne une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on suppose qu'elle possède une dérivée symétrique en tout point de $\mathbb{R}$.
On suppose de plus qu'il existe a et b dans $\mathbb{R}$ vérifiant les inégalités

$$a < b \qquad \text{et} \qquad f(a) > f(b)$$

et on prend un tel couple (a, b). Le but de cette question est de montrer l'existence d'un élément d de $]a, b[$ vérifiant l'inégalité $f'_s(d) \leqslant 0$.

On fixe un élément y de l'intervalle $]f(b), f(a)[$ et on introduit l'ensemble

$$\mathrm{E}_y = \{x \in [a, b] \ ; \ f(x) > y\}.$$

a. Montrer que l'ensemble E_y possède une borne supérieure. On la note d.

b. Montrer l'encadrement $a < d < b$.

c. Montrer l'égalité $f(d) = c$.

On raisonne maintenant par l'absurde. On fait l'hypothèse que $f'_s(d)$ est strictement positif. On pose $\varepsilon_0 = f'_s(d)/2$.

d. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant la propriété

$$\forall h \in]0, \alpha], \quad \varepsilon_0 \leqslant \frac{f(d+h)-f(d-h)}{2h}.$$

On prend un tel α.

e. Montrer qu'on peut choisir h dans $]0, \alpha]$ vérifiant les propriétés

$$d + h \leqslant b \qquad \text{et} \qquad f(d-h) > y.$$

Pour un tel h, montrer que $d + h$ est dans E_y. Conclure.

Question 18. On prend une fonction f continue de $\mathbb{R}$ qui admet en tout point de $\mathbb{R}$ une dérivée symétrique. On suppose de plus que $f'_s(x)$ est strictement positif pour tout x réel.

a. Montrer que f est croissante.

b. Montrer que f est même strictement croissante.

Question 19. On prend une fonction f continue de $\mathbb{R}$ qui admet en tout point de $\mathbb{R}$ une dérivée symétrique. On suppose de plus que $f'_s(x)$ est positif pour tout x réel.

a. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que la fonction $f_\varepsilon : x \mapsto f(x) + \varepsilon x$ est strictement croissante.

b. En déduire que la fonction f est croissante.
