Mathématiques — préparation à l'oral

Nombres complexes, polynômes

A110-24

Exercice 1. Résoudre le système

$$x + y + z = 1, \quad xyz = 1, \quad |x| = |y| = |z| = 1$$

d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{C}^3$.

A108-24

Exercice 2. Déterminer les valeurs de $z \in \mathbb{C}$ pour lesquelles les points $\mathrm{M}(z), \mathrm{A}(1), \mathrm{N}(1 + z^2)$ sont alignés.

A104-24

Exercice 3. On note j le nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$.

Déterminer tous les polynômes $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_3[\mathrm{X}]$ tels que

$$\mathrm{P}(\mathrm{j}) = \mathrm{j}^2, \quad \mathrm{P}(\mathrm{j}^2) = \mathrm{j}, \quad \mathrm{P}'(\mathrm{j}) = \mathrm{j}, \quad \mathrm{P}'(\mathrm{j}^2) = \mathrm{j}^2.$$

On pourra considérer le polynôme $\mathrm{R} = \mathrm{P}' - \mathrm{X}$.

A028-23

Exercice 4.
Soit un entier $n \geqslant 2$. On pose $\mathrm{P} = \displaystyle\prod_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} (\mathrm{X} - \omega)$ et $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}} \frac{1}{1 - \omega}$.

1. Simplifier l'expression de P.

2. Simplifier l'expression de S.

A006-17

Exercice 5. Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{P}(\mathrm{X}^2) = \mathrm{P}(\mathrm{X})^2$.

1611-24

Exercice 6. On pose $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 - (2 + \mathrm{i})\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} + \mathrm{i} - 2$.

Montrer que P possède une racine réelle puis factoriser P sur $\mathbb{C}$.

1612-24

Exercice 7. Le polynôme $\mathrm{X}^4 + 4$ est-il irréductible sur $\mathbb{R}$?

1613-24

Exercice 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{P}_n = n\mathrm{X}^{n+2} - (n + 2)\mathrm{X}^{n+1} + (n + 2)\mathrm{X} - n$.

Montrer que $(\mathrm{X} - 1)^3$ divise P_n. Calculer le quotient.

0990-24

Exercice 9. Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, montrer que $\mathrm{P} - \mathrm{X}$ divise $\mathrm{P} \circ \mathrm{P} - \mathrm{X}$.

Espaces vectoriels et applications linéaires

A083-24

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On se donne une famille libre $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_n)$ de E et on note F le sous-espace vectoriel de E engendré par $\mathcal{B}$.
On considère un supplémentaire G de F dans E et on prend un vecteur a de G. On pose alors

$$\mathrm{F}_a = \mathrm{Vect}(a + b_1, \dots, a + b_n).$$

Montrer que F_a et G sont supplémentaires dans E.

0356-14

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel complexe. On prend des vecteurs $v_1, \dots, v_n$ de E.
Soit A une matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$. On fait l'hypothèse

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \qquad a_{i,1}v_1 + \cdots + a_{i,n}v_n = 0_{\mathrm{E}}.$$

Montrer que les vecteurs $v_1, \dots, v_n$ sont nuls.

Exercice 12. Soient $z_0, \dots, z_n$ des nombres complexes tous distincts. Montrer que la famille $((\mathrm{X}-z_k)^n)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. 0669-17

Exercice 13. On fixe un entier $n \geqslant 1$. On note ϕ l'endomorphisme $\mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}-\mathrm{P}'$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. A017-24

On note N la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et on note M la matrice de ϕ dans cette base.

1. Déterminer la matrice M.

2. L'endomorphisme ϕ est-il diagonalisable ?

3. Montrer que les matrices M et N sont semblables.

4. Soit $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

4.1. Montrer qu'il existe un unique polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ tel que $\mathrm{P}-\mathrm{P}' = \mathrm{Q}$.

4.2. Montrer que si la fonction Q est positive sur $\mathbb{R}$, alors la fonction P l'est aussi.

4.3. Exprimer P en fonction de Q et de ses dérivées.

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. S001-22

a. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que tout vecteur non nul de E est un vecteur propre de f.
Montrer que f est un multiple de Id_{E}.

b. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que f commute avec tous les endomorphismes de E.
Montrer que f est un multiple de Id_{E}.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soient u et v deux endomorphismes de E. A014-23

1. Prouver la majoration $\mathrm{rg}(u+v) \leqslant \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

2. On suppose que $u \circ v$ est nul et que $u+v$ est bijectif.

Prouver les égalités $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = n$ et $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 16. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n. A017-17

1. Si f est un projecteur, quel est le lien entre $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{tr}(f)$?

2. Si $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{tr}(f) = 1$, montrer que f est un projecteur.

Exercice 17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. 0998-24

a. Montrer que F est un hyperplan de E si, et seulement si, il existe une forme linéaire ϕ non nulle sur E dont F est le noyau.

b. Soit F un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice A non nulle telle que

$$\mathrm{F} = \{\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \ ; \ \mathrm{tr}(\mathrm{AM}) = 0\}.$$

Montrer que F contient au moins une matrice inversible.

Matrices

Exercice 18. On fixe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ et on pose $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0 & -c & a\\ c & 0 & b\\ -a & -b & 0\end{pmatrix}$. A015-24

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on définit la matrice $\mathrm{S}_n=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\mathrm{M}^k}{k!}$.

1. Trouver un nombre réel θ tel que $\mathrm{M}^3=-\theta\mathrm{M}$.

2. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, montrer l'égalité $\mathrm{M}^{2n}=(-\theta)^{n-1}\mathrm{M}^2$.

3. Montrer que la suite de matrices $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Sa limite est notée S_∞.

4. Trouver deux nombres réels α et β tels que $\mathrm{S}_\infty=\mathrm{I}_3+\alpha\mathrm{M}+\beta\mathrm{M}^2$.

Exercice 19. Soient $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B}\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$. On suppose que A032-24

$$\mathrm{AB}=\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

1. Montrer que AB est une matrice de projection.

2. Montrer que $\mathrm{BA}=\mathrm{I}_2$.

Exercice 20. Soit un entier $n\geqslant 3$. On considère la matrice $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots & 1\\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 1 & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A079-24

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

2. En déduire que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathrm{B}\end{pmatrix}$, où le bloc B est inversible.

On explicitera B et la matrice de passage.

Question bonus. Résoudre l'équation $\mathrm{M}^2=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ d'inconnue $\mathrm{M}\in\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

Exercice 21. Soit un entier $n\geqslant 2$. On pose $\mathrm{D}=\mathrm{diag}(1,\ldots,n)$ et on définit l'endomorphisme $g:\mathrm{M}\mapsto\mathrm{DM}-\mathrm{MD}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. A115-24

1. Montrer que $\mathrm{Im}(g)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de diagonale nulle.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$.

3. Soit a un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, la famille $(x,a(x))$ soit liée. Montrer que a est une homothétie.

4. Montrer que toute matrice de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

5. Montrer que toute matrice de trace nulle est de la forme $\mathrm{AB}-\mathrm{BA}$ pour un certain couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 22. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Dire que A est *pseudo-inversible* signifie qu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que A061-24

$$\mathrm{AB} = \mathrm{BA}, \quad \mathrm{ABA} = \mathrm{A}, \quad \mathrm{BAB} = \mathrm{B},$$

auquel cas la matrice B est appelée *une pseudo-inverse* de la matrice A.

1. On suppose que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}^2)$ et on pose $r = \mathrm{rg}(\mathrm{A})$.

1.1. Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$ et $\mathrm{Ker}(\mathrm{A})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1.2. Montrer qu'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{C} \in \mathrm{GL}_r(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \begin{pmatrix} \mathrm{C} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Montrer que A est pseudo-inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}^2)$.

3. On suppose que A est pseudo-inversible et on considère une pseudo-inverse B de A.

On considère les endomorphismes $a : \mathrm{U} \mapsto \mathrm{AU}$ et $b : \mathrm{U} \mapsto \mathrm{BU}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3.1. Montrer que $a \circ b$ est un projecteur et préciser ses axes.

3.2. Montrer que A possède une unique pseudo-inverse.

Exercice 23. Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Soient X et Y dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. 0397-17

Montrer que l'inversibilité de la matrice $\mathrm{A} + \mathrm{Y} \times \mathrm{X}^{\mathrm{T}}$ équivaut à $\mathrm{X}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{A}^{-1} \times \mathrm{Y} \neq -1$.

Exercice 24. Trouver tous les couples (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant les égalités $\mathrm{AB} = \mathrm{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 0689-15

Déterminant

Exercice 25. Pour tout polynôme réel P, on note $f(\mathrm{P})$ le polynôme associé à la fonction P003-24

$$x \mapsto \int_x^{x+1} \mathrm{P}(t)\, \mathrm{d}t.$$

a. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ est stable par f. L'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ induit par f est noté f_n.

c. Calculer le déterminant de f_n.

Exercice 26. Soit $(a, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$. Calculer $\begin{vmatrix} a & x & \cdots & \cdots & x \\ y & z & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ y & 0 & \cdots & 0 & z \end{vmatrix}$. 1000-24

Exercice 27. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On note ses colonnes $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$. Pour tout indice j dans $[\![1, n]\!]$, on pose 0948-15

$$\mathrm{B}_j = \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ k \neq j}} \mathrm{A}_k.$$

On note B la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ dont les colonnes sont $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_n$. Exprimer le déterminant de la matrice B en fonction de celui de la matrice A.

Réduction

A051-24

Exercice 28. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on pose $f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}'$.

On définit également l'endomorphisme g de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ par

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad g(\mathrm{X}^k) = \mathrm{X}^{n-k}.$$

Enfin, on note $\mathcal{B}$ la base canonique $(1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

1. Donner la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

2. Montrer que f admet 0 pour unique valeur propre et que f n'est pas diagonalisable.

3. Montrer que g est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et que $g^{-1} = g$.

4. On pose $h = g^{-1} \circ f \circ g$. Montrer que h n'est pas diagonalisable.

5. On pose $u = h + f$. Trouver deux éléments a et b de $\mathbb{R}$ tels que

$$\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}], \quad u(\mathrm{P}) = a\mathrm{XP} + b(\mathrm{X}^2 - 1)\mathrm{P}'.$$

6. Trouver la matrice de u relativement à la base $\mathcal{B}$.

7. Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on pose $\mathrm{P}_k = (\mathrm{X} - 1)^k(\mathrm{X} + 1)^{n-k}$. Calculer $u(\mathrm{P}_k)$. En déduire $\mathrm{dét}(u)$.

A086-24

Exercice 29. On note (E) l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$ et F l'espace vectoriel des solutions de (E) à valeurs réelles.

1. Rappeler quels sont les éléments de (E).

2. On définit les fonctions

$$\varphi_c : t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \quad \text{et} \quad \varphi_s : t \mapsto \mathrm{e}^{-t/2} \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t).$$

Vérifier que ces deux fonctions forment une base de F. Trouver en quels points elles s'annulent.

3. Montrer que φ_c est développable en série entière et préciser le rayon de convergence.

4. On note D l'application $f \mapsto f'$.

4.1. Vérifier que D est un endomorphisme de F.

4.2. Est-il diagonalisable ?

4.3. Calculer D^3.

5. Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout élément f de F, on définit la fonction $\mathrm{T}_a(f) : x \mapsto f(a + x)$.

5.1. Montrer que T_a est un endomorphisme de F.

5.2. Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme T_a est-il diagonalisable ?

6. Trouver tous les couples $(\mu, a) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\mathrm{D} = \mu\mathrm{T}_a$.

A005-24

Exercice 30. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A n'est pas un multiple de I_n.

a. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que M commute avec toutes les matrices semblables à A.

Montrer que M est un multiple de I_n.

b. Cette propriété est-elle encore valable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 31. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. A095-24

1. Dans cette question, on suppose que $\mathrm{Sp(A)} \cap \mathrm{Sp(B)}$ est non vide et on prend α dans cette intersection.

1.1. Montrer qu'il existe une matrice colonne Y non nulle telle que $\mathrm{B^T Y} = \alpha \mathrm{Y}$.

1.2. En déduire qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que AM = MB.

2. Réciproquement, on suppose qu'il existe une matrice M non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que AM = MB. On note r le rang de M.

2.1. Rappeler le théorème du rang en version géométrique.

2.2. En déduire qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathrm{Q^{-1}MP} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.3. Montrer que $\mathrm{Sp(A)} \cap \mathrm{Sp(B)}$ n'est pas vide.

Exercice 32. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. A021-24

On considère l'endomorphisme $\varphi : h \mapsto g \circ h - h \circ g$ de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$.

1. Calculer le déterminant de φ.

2. Soit λ une éventuelle valeur propre non nulle de φ. Montrer que les vecteurs propres de φ associés à λ sont des endomorphismes nilpotents.

Exercice 33. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. A037-24

Montrer que A est semblable à $-\mathrm{A}$ si et seulement si $\mathrm{tr(A)} = 0$ et $\mathrm{dét(A)} = 0$.

Exercice 34. On considère la matrice A_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients A047-24

$$(\mathrm{A}_n)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ j & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}_n) \iff \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda + k} = 1.$$

2. En déduire que A_n est diagonalisable.

Exercice 35. On pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$. 0407-17

Déterminer la dimension de $\{\mathrm{B} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \ ; \ \mathrm{AB} = \mathrm{BA}\}$.

Exercice 36. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. A026-23
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$. On suppose que f possède n valeurs propres distinctes.

1. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$. Montrer que f et $\mathrm{P}(f)$ sont diagonalisables et admettent une base de diagonalisation commune.

2. Soit $g \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ tel que f et g commutent. Montrer que g est diagonalisable.

3. Montrer que l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec f est $\{\mathrm{Q}(f) \ ; \ \mathrm{Q} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]\}$.

Exercice 37. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{A}^2 + \mathrm{A} + 4\mathrm{I}_n = 0$. A053-24

1. Montrer que A n'a pas de valeur propre réelle.

2. Montrer que n est pair.

3. Exprimer la trace et le déterminant de A.

Exercice 38. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation 1316-12

$$\mathrm{A}^4 - 2\mathrm{A}^3 + 2\mathrm{A}^2 = 0.$$

Montrer que sa trace est un entier pair.

Exercice 39. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation $\mathrm{A}^3 - \mathrm{A} - \mathrm{I}_n = 0$. Montrer que son déterminant est strictement positif. 1317-12

Exercice 40. Une *matrice stochastique* est une matrice carrée à coefficients réels positifs telle que sur chaque ligne, la somme des coefficients soit égale à 1. A045-17

1. Soient A et B deux matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est stochastique.

2. Soit A une matrice stochastique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que 1 est une valeur propre de A et que toutes les valeurs propres de A ont un module majoré par 1.

3. Montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{A} - \mathrm{I}) = \mathrm{Ker}((\mathrm{A} - \mathrm{I})^2)$.

Espaces euclidiens

Exercice 41. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique (e_1, e_2, e_3) et de son produit scalaire canonique. A094-24
On note u le vecteur $(1, 1, 1)$ de $\mathbb{R}^3$.

On définit l'application $f : x \mapsto \sum_{i=1}^{3} x_i \left(e_i - \frac{1}{3}u\right)$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que f est un projecteur orthogonal de E.

2. Déterminer le rang de f.

Exercice 42. Soit $\mathrm{L} = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1$. A066-24

On pose $\mathrm{M} = \mathrm{I}_n - 2\mathrm{L}^{\mathrm{T}} \times \mathrm{L}$.

1. Montrer que M est une matrice orthogonale.

2. Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M.

Exercice 43. Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, on pose A085-17

$$(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \mathrm{P}(0)\mathrm{Q}(0) + \mathrm{P}(1)\mathrm{Q}(1) + \mathrm{P}(2)\mathrm{Q}(2).$$

a. Prouver qu'on a alors défini un produit scalaire.

b. Trouver une base orthonormale de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ pour ce produit scalaire.

Exercice 44. Soit $\mathrm{M} \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$. On suppose que M est triangulaire. A070-24

Que peut-on dire de M ?

Exercice 45. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On note A040-24

$$\mathcal{C}_A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle Ax, x\rangle = 0\}.$$

1. Dans cette question, on prend $n = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer l'ensemble $\mathcal{C}_A$.

2. Montrer que les trois assertions suivantes sont équivalentes

1. $C_A = \mathrm{Ker}(A)$;
2. C_A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$;
3. $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ou $-A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Exercice 46. Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul. 1069-24

Montrer que la suite de terme général $\dfrac{\langle X, A^{k+1}X\rangle}{\langle X, A^k X\rangle}$ converge vers une valeur propre de A, à déterminer.

Exercice 47. Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que son spectre est inclus dans $\mathrm{i}\mathbb{R}$. 0559-16

Exercice 48. Soit A une matrice symétrique définie positive. Montrer que ses coefficients diagonaux sont strictement positifs. 0698-17

Exercice 49. Soit $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Déterminer $\max\{\mathrm{tr}(PS)\ ;\ P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})\}$. 0658-24

Exercice 50. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. 0665-24

Montrer que A est positive si et seulement si pour toute $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a $\mathrm{tr}(AB) \geqslant 0$.

Espaces vectoriels normés

Exercice 51. On note E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. Étant donné deux éléments P et Q de E décomposés dans la base canonique sous la forme A009-24

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n X^n \quad \text{et} \quad Q = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n X^n,$$

on pose

$$(P|Q) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_n q_n \quad \text{et} \quad \varphi(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

1. Montrer que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur E. Sa norme associée est notée $||\ ||$.

2. Montrer que φ est une forme linéaire sur E. Son noyau est noté H.

3. Soit ψ une forme linéaire continue sur E. Montrer que $\mathrm{Ker}(\psi)$ est un fermé de E.

4. Montrer que φ est lipschitzien et en déduire que H est un fermé de E.

5. Pour toute partie A de E, montrer que $A^\perp$ est un fermé de E puis que $(A^\perp)^\perp$ est un fermé de E qui contient l'adhérence de A.

6. Déterminer $\sup\left\{\dfrac{|\varphi(P)|}{||P||}\ ;\ P \in E \setminus \{0\}\right\}$.

Exercice 52. On note $\mathrm{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A064-24

1. Montrer que l'adhérence de $\mathrm{D}_n(\mathbb{C})$ est $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Déterminer l'adhérence de $\mathrm{D}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 53. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit la fonction $f_\alpha : (x, y) \mapsto x^2 + 2\alpha xy + y^2 - 1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. A043-24
On introduit les ensembles

$$\Gamma_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + 2\alpha xy + y^2 = 1\} \quad \text{et} \quad \beta_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + 2\alpha xy + y^2 \leqslant 1\}.$$

On définit enfin la fonction

$$\phi_\alpha : ((x, y), (x', y')) \mapsto xx' + \alpha(xy' + x'y) + yy'$$

de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble Γ_α n'est pas vide.

2. Vérifier l'identité $x^2 + 2\alpha xy + y^2 = (x + \alpha y)^2 + (1 - \alpha^2)y^2$.

3. Montrer que f_α est continue et que Γ_α est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

4. Montrer que ϕ_α est un produit scalaire si et seulement si $|\alpha| < 1$.

5. Montrer que β_α est convexe si $|\alpha| < 1$.

6. Montrer que Γ_α est borné si et seulement si $|\alpha| < 1$.

Exercice 54. On note $\mathrm{E} = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Pour tout élément f de E, on note A032-15

$$g_1(f) = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \qquad \text{et} \qquad g_2(f) = \int_0^1 \mathrm{e}^t \, |f(t)| \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que g_1 et g_2 sont des normes sur E.

2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} 1 - nx & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la convergence de la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ dans les espaces vectoriels normés (E, g_1) et (E, g_2).

Suites numériques

Exercice 55. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{\substack{1 \leqslant i, j \leqslant n-1 \\ i+j=n}} \frac{1}{ij}$. P002-24

Trouver un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 56. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $\mathrm{P}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathrm{X}^k - 1$. A001-24

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que P_n possède une unique racine dans $]0, +\infty[$. Celle-ci est notée x_n.

b. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et trouver sa limite (notée ℓ pour la suite de l'énoncé).

c. Trouver un équivalent de $x_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 57. On fixe $\alpha \in]0,1[$ et on définit $f : t \mapsto 1/t^\alpha$ de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$. A099-24

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \min\left\{p \in \mathbb{N}^* \,;\, \sum_{k=1}^{p} f(k) \geqslant n\right\}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que a_n est bien défini et prouver la minoration $a_n \geqslant n$.

2. Trouver un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. Trouver un équivalent de a_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 58. Montrer que les suites $(\cos(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(\sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\cos(\sqrt{n}))_{n\in\mathbb{N}}$ sont divergentes. 0893-15

Exercice 59. Pour tout x réel, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. A012-23

Trouver un équivalent de $\{n!\,\mathrm{e}\}$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

Exercice 60. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $x_n + \frac{1}{2}x_{n+1}$ tende vers 1 quand n tend vers $+\infty$. 0452-15
Prouver que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et trouver sa limite.

Exercice 61. On fixe $u_0 > 0$ puis on pose $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 0430-17

Exercice 62. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{R}_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \dfrac{k}{n}\right)$ et $\mathrm{S}_n = \prod_{k=1}^{n} (n+k)^{1/n}$. 1213-22

a. Calculer la limite de R_n quand n tend vers $+\infty$.

b. Trouver un équivalent de S_n quand n tend vers $+\infty$.

Fonctions d'une variable réelle

Exercice 63. Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ telles que A031-24

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}.$$

Exercice 64. Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $f \circ g$ est décroissante. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ admettent un unique point fixe. 0721-17

Exercice 65. Soient P et Q deux polynômes réels non nuls. A048-24

L'équation $\dfrac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{Q}(x)} = \mathrm{e}^x$ peut-elle avoir une infinité de solutions ?

Exercice 66. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2} - 1}{x}$. On pose également $f(0) = 0$. 0584-17

a. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

c. Déterminer le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f^{-1}.

Exercice 67. On définit la fonction *cotangente* sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ par A092-24

$$\cot : t \mapsto \frac{\cos(t)}{\sin(t)}.$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}\times]-\pi, \pi[$. On définit de $]-2\pi, -\pi[$ dans $\mathbb{R}$ la fonction

$$v_{a,b} : t \mapsto t + \exp(a - (b - t)\cot(t))\sin(t).$$

1. Montrer que l'équation $v_{a,b}(y) = b$, d'inconnue $y \in]-2\pi, -\pi[$, admet au moins une solution.

2. Montrer que le système

$$\left\{\begin{array}{ccccc} x & + & e^x\cos(y) & = & a \\ y & + & e^x\sin(y) & = & b \end{array}\right.$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ admet au moins une solution.

Exercice 68. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathrm{Arctan}(x-1) + \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(x+1) = \pi/2$. 0503-16

Exercice 69. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = 1/2$. 0452-17

Montrer que f possède au moins un point fixe. Y a-t-il unicité ?

Séries numériques

Exercice 70. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{R}_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$. S001-24

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\mathrm{R}_n \leqslant \dfrac{1}{n!}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$.

2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin^\alpha(2\pi e n!)$.

3. Nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \sin(\pi e n!)$.

Exercice 71. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en prenant u_0 dans $]0,1]$ puis en posant $u_{n+1} = \sin(u_n)$. A065-24

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

2. Trouver la limite de $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3}$. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n^3$.

3. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} u_n^2$ diverge.

Exercice 72. Nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{3/4} + \sin(n)}$. 0830-17

Exercice 73. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $\mathrm{P}_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$. 1342-24

1. Montrer qu'il existe une constante γ telle que $\mathrm{H}_n = \ln(n) + \gamma + \mathrm{o}$.

2. Montrer qu'il existe une constante $\mathrm{C} > 0$ telle que $\mathrm{P}_n \sim \mathrm{C}/\sqrt{n}$.

Exercice 74. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note $s(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture décimale de n. 1058-12

Convergence et somme de la série de terme général $\dfrac{s(n)}{n(n+1)}$.

Suites et séries de fonctions

A012-24

Exercice 75. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout élément $\varepsilon = (\epsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1})$ de $\{0;1\}^n$, on pose

$$\Phi(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k \, 2^k.$$

1. Montrer que Φ est injective et déterminer son image.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$u_n : x \mapsto \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + x^{2^k}\right).$$

Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]-1,1[$ et préciser sa limite simple.

Exercice 76. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : t \mapsto n\cos(t)\sin^n(t)$. 1100-18

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[0, \pi/2]$, puis la convergence uniforme.

A035-24

Exercice 77. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout x réel, on pose $f_n(x) = \dfrac{1}{n} \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{x}{\sqrt{n}}\right)$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Sa somme est notée f.

2. Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

A068-24

Exercice 78. Pour tout x réel convenable, on pose $\mathrm{S}(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.

1. Montrer que S est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

2. Déterminer la limite de S en $+\infty$.

Exercice 79. A013-23

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]0, +\infty[$, on pose $u_n(x) = \mathrm{e}^{-x\sqrt{n}}$.

1. Prouver que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$. Sa somme est notée f.

2. Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$.

3. Prouver que f est intégrable sur $[1, +\infty[$ et exprimer son intégrale sous la forme d'une somme de série.

4. La fonction f est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

5. Vérifier que f est décroissante sur $]0, +\infty[$. Que dire de ses limites aux bornes ?

6. Trouver un équivalent de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Séries entières

Exercice 80. A054-24

Exercice 80. 1. Justifier que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{1+n^2}$ converge.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{R}_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{1+k^2}$.

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{R}_n\, x^n$.

0863-17

Exercice 81. Rayon de convergence et somme de $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{in\alpha}}{n} x^n$.

0515-16

Exercice 82. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose que la série entière $\sum a_n z^n$ possède un rayon de convergence R fini et strictement positif.

Trouver les rayons de convergence de $\sum a_n z^{2n}$, de $\sum (a_n)^2 z^n$ et de $\sum a_n z^{n^2}$.

A078-24

Exercice 83. On définit une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en prenant $a_0 = 1$ puis

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!}.$$

1. Montrer que tous les termes de cette suite sont rationnels.

2. On pose $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ quand c'est possible.

2.1. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ vaut au moins 1. On le note R.

2.2. Pour tout z complexe tel que $|z| < \mathrm{R}$, montrer l'égalité $f(z) = \dfrac{2}{\mathrm{e}^z + 1}$.

2.3. En déduire une majoration de R.

A102-24

Exercice 84. On définit une suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes réels en posant $\mathrm{T}_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{T}_{n+1}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}(\mathrm{T}_n(\mathrm{X}) + \mathrm{T}_n'(\mathrm{X})).$$

1. Calculer T_n pour tout $n \in [\![1, 4]\!]$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité

$$\mathrm{T}_{n+1}(\mathrm{X}) = \mathrm{X} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{T}_k(\mathrm{X}).$$

3. On définit de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ la fonction $\phi : t \mapsto \exp(\exp(t))$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que la dérivée n-ième de ϕ est donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \phi^{(n)}(t) = \mathrm{T}_n(\mathrm{e}^t)\phi(t).$$

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire une expression du développement en série entière de la fonction $x \mapsto \mathrm{T}_n(x)\mathrm{e}^x$.

5. Soit $\lambda > 0$. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation entre $\mathbb{E}(\mathrm{X}^n)$ et $\mathrm{T}_n(\lambda)$.

Exercice 85. On considère l'équation différentielle suivante, notée (E). A045-24

$$x(x-1)y'' + 3xy' + y = 0.$$

1. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.

2. Trouver une expression de ces fonctions à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 86. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ soit de rayon infini. Sa somme est notée f. 1500-24

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $r \in [0, +\infty[$, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}\ \mathrm{d}t$.

2. Montrer que si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors elle est constante.

Exercice 87. Rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{3^{n^2}} x^n$. 0587-16

Exercice 88. Rayon de convergence et somme de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$. 0588-16

Intégration

Exercice 89. Soient f et g dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. On suppose que la fonction g est positive. 0453-17

Montrer l'existence de $c \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice 90. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles strictement positives. A026-24

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'existence d'un unique $(n+1)$-uplet $(a_{n,0}, \ldots, a_{n,n})$ d'éléments de $[0,1]$ tel que

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad \int_0^{a_{n,k}} f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{k}{n}\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t.$$

2. Déterminer la limite de $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_{n,k}$ quand n tend vers $+\infty$.

3. Peut-on faire la même chose si f est seulement supposée continue et positive ?

Exercice 91. Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\int_{x^2}^{x^3} \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{Arcsin}(t)}\ \mathrm{d}t$ quand x tend vers 0. 0881-17

Exercice 92. Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\ \mathrm{d}x$ en posant $u = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$. 1579-24

Exercice 93. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose $\displaystyle\mathrm{P}_n = \prod_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$. 1295-24

1. Montrer l'existence de $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\sin(t))\ \mathrm{d}t$. Sa valeur est notée I.

2. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\pi}{2n}\ln(\mathrm{P}_n) = \mathrm{I}$.

3. Trouver un lien entre P_n^2 et P_{2n}. En déduire la valeur de I.

Exercice 94. Existence et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)\cdots(n+t)}$. 1134-24

Exercice 95. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^n}\ \mathrm{d}t$. A052-24

1. Justifier l'existence de cette intégrale.

2. Déterminer la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 96. Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose A072-24

$$\mathrm{J}_n(f) = \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{2}}{1+\cos^2(nx)} f(x)\ \mathrm{d}x.$$

1. Justifier l'existence de $\mathrm{J}_n(f)$.

2. Dans cette question, on suppose que f est la fonction $x \mapsto 1$.

2.1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer les égalités $\mathrm{J}_n(f) = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sqrt{2}}{1+\cos^2(u)}\ \mathrm{d}u = \int_0^{\pi/2} \frac{2\sqrt{2}}{1+\cos^2(u)}\ \mathrm{d}u$.

2.2. À l'aide du changement de variable $t = \tan(u)$ (dûment justifié), calculer $\mathrm{J}_n(f)$.

3. On revient au cas général. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité

$$\mathrm{J}_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{2}}{1+\cos^2(u)} f\left(\frac{u+k\pi}{n}\right)\ \mathrm{d}u.$$

4. En déduire la limite de $\mathrm{J}_n(f)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 97. Étudier la suite de terme général $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^{n} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x}\ \mathrm{d}x$. 0675-10

Exercice 98. Pour tout $x \in [0,+\infty[$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \mathrm{Arctan}\left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)+x}\right)\ \mathrm{d}t$. On pose aussi $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\ \mathrm{d}u$. A010-24

a. Montrer que ces intégrales existent.

b. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$ et exprimer sa dérivée.

c. Vérifier l'égalité $f(1) - f(0) = -\dfrac{3}{4}\mathrm{I}$ et en déduire la valeur de I.

d. Exprimer I en fonction de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ et en déduire la valeur de cette somme.

Exercice 99. On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}-1}{t}\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$. 0822-24

1. Pour tout $u \in \mathbb{R}$, montrer la majoration $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}u}-1\right| \leqslant |u|$.

2. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ puis obtenir une expression simplifiée de f.

Équations différentielles

S002-24

Exercice 100. On considère la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser la matrice A.

2. Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x'' = 5x + y \\ y'' = -7x - 3y. \end{cases}$

Exercice 101. Résoudre l'équation différentielle $x^2 f'(x) + f(x) = 1$ sur $]0, +\infty[$. Trouver une solution sur $\mathbb{R}$. 0972-16

Exercice 102. Résoudre l'équation différentielle $x^2 y'' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$ à l'aide de la fonction $z : t \mapsto y(\mathrm{e}^t)$. 2021-09

Fonctions de plusieurs variables

A032-23

Exercice 103. On définit une fonction f de $[0, 1]^2$ dans $\mathbb{R}$ en posant

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(1-x)(1-y)}{1-xy} & \text{si } (x, y) \neq (1, 1) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Pour tout $(x, y) \in [0, 1]^2$, prouver la majoration $(1-x)(1-y) \leqslant (1 - \sqrt{xy})^2$.

2. En déduire que f est continue en $(1, 1)$.

3. On pose $x_0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. Montrer que f admet un maximum en (x_0, x_0).

A063-17

Exercice 104. On définit $f : (x, y) \mapsto x\mathrm{e}^y + y\mathrm{e}^x$ sur $\mathbb{R}^2$ et $g : t \mapsto t + \exp(t - 1/t)$ sur $\mathbb{R}^*$.

Résoudre l'équation $g(t) = 0$. En déduire les points critiques de f puis étudier ces points critiques.

A090-24

Exercice 105. Soit (n, p) un couple d'entiers supérieurs ou égaux à 2.

1. Montrer que la fonction $\varphi_n : x \mapsto x^{n-1}$ réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 1]$.

2. On note M_p la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Justifier que M_p est diagonalisable et déterminer son rang.

3. Déterminer le spectre de M_p et en déduire celui de $\mathrm{M}_p + \mathrm{I}_p$.

4. On introduit l'ensemble

$$\mathrm{D}_p = \{(x_1, \ldots, x_p) \in (]0, 1[)^p \; ; \; \sum_{i=1}^{p} x_i < 1\}$$

et on admet que c'est un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On définit de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ la fonction

$$f_p : (x_1, \ldots, x_p) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (x_i)^n + \left(1 - \sum_{i=1}^{p} x_i\right)^n.$$

Montrer que f_p est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer ses dérivées partielles d'ordre 1.

5. Montrer que $\dfrac{1}{p+1}(1, \ldots, 1)$ est l'unique point critique de f_p dans D_p. Ce point est noté a_p.

6. Déterminer la hessienne de f_p au point a_p et en déduire que f_p admet un minimum local en a_p.

Exercice 106. On définit de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ la fonction $f : (x, y) \mapsto |\sin(x + \mathrm{i}y)|^2$. A096-24

On pose $\mathrm{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

1. Pour tout $t \geqslant 0$, prouver les inégalités $\sin(t) \leqslant t$ et $\operatorname{sh}(t) \geqslant t$.

2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, prouver les égalités $f(x, y) = \operatorname{ch}^2(y)\cos^2(x) + \operatorname{sh}^2(y)\sin^2(x)$ et

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{ch}(2y) - \cos(2x)}{2}.$$

3. Préciser le signe de f sur $\mathbb{R}^2$ et montrer que f possède un minimum en $(0, 0)$.

4. Montrer que D est fermé et borné, puis en déduire que f possède un maximum sur D.

5. On pose $\mathrm{D}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x^2 + y^2 < 1\}$.

5.1. Montrer que D' est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

5.2. Déterminer l'ensemble des points critiques de F sur D'.

5.3. En déduire qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que le maximum de f sur D soit $f(\cos(t_0), \sin(t_0))$.

6. On définit $g : \theta \mapsto f(\cos(\theta), \sin(\theta))$.

Montrer que g est croissante sur $[0, \pi/2]$ et en déduire le maximum de f sur D.

Exercice 107. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse 0642-17

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \geqslant 1.$$

Montrer que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand $||x||$ tend vers $+\infty$.

Exercice 108. On note $|| \ ||$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. 0396-13

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. On fait l'hypothèse que toutes les dérivées partielles de f sont bornées par 1.
Montrer la majoration

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2, \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant \sqrt{n} \ ||x - y||.$$

Exercice 109. Soit $f \in \mathcal{C}^2(]0, +\infty[, \mathbb{R})$. On définit A017-23

$$\Phi : (x, y, z) \mapsto f\left(\frac{x^2 + y^2}{z^2}\right)$$

de $]0, +\infty[^3$ dans $\mathbb{R}$.

Déterminer les choix de f pour lesquels la fonction Φ est harmonique.

Exercice 110. Résoudre l'équation $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, d'inconnue $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. S001-23

Exercice 111. Résoudre $\dfrac{\partial f}{\partial x} - xy\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ à l'aide du changement de variables $(u, v) = (x, y\,\mathrm{e}^{x^2/2})$. 1140-17

Exercice 112. On définit de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ l'application $f : (x, y) \mapsto (x + y, x^7 - y^7)$. 0610-16

Montrer que f est une bijection.

Probabilités et dénombrement

Exercice 113. Déterminer le nombre d'applications $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ telles que $f \circ f = f$. 0613-16

Exercice 114. On considère un disque divisé en n secteurs angulaires de même amplitude, numérotées de 1 à n. Le disque tourne et on pose une bille dessus. Lorsque la bille s'arrête sur une des sections, on gagne un cadeau. Il y a un unique cadeau associé à chaque section. A060-24

On note S_n la variable aléatoire égale au nombre d'étapes pour obtenir tous les cadeaux.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note T_i le nombre d'étapes effectuées pour passer de $i-1$ cadeaux obtenus à i cadeaux obtenus.

1. Déterminer la loi de T_1 puis, pour tout $i \in [\![2,n]\!]$, trouver la loi de T_i.

2. Déterminer un équivalent de $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n)$ et de $\mathbb{V}(\mathrm{S}_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

3. Soit $\alpha \in]0,1[$. Pour tout entier $n \geqslant 3$, trouver un nombre $r_{\alpha,n} > 0$ tel que $\mathbb{P}(\mathrm{S}_n > r_{\alpha,n}) \leqslant \alpha$.

Exercice 115. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$. A091-24

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{Y}_n = \mathrm{X}_n + \mathrm{X}_{n+1}$ puis $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{Y}_k$.

1. Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{S}_n)$ et $\mathbb{V}(\mathrm{S}_n)$.

2. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbb{P}\left(\left|\dfrac{\mathrm{S}_n}{n} - 2p\right| \geqslant \varepsilon\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 116. **1.** Soit A une partie finie et non vide de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathrm{A}$. A093-24

Trouver tous les polynômes $\mathrm{Q} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$ tels que $\mathrm{Q}(x_0) = 1$ et

$$\forall x \in \mathrm{A} \setminus \{x_0\}, \quad \mathrm{Q}(x) = 0.$$

2. Soient X et Y deux variables aléatoires finies.

Montrer que l'indépendance de X et Y équivaut à

$$\forall (k,\ell) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{E}(\mathrm{X}^k\mathrm{Y}^\ell) = \mathbb{E}(\mathrm{X}^k)\mathbb{E}(\mathrm{Y}^\ell).$$

Exercice 117. On considère une urne remplie avec des boules numérotées de 1 à $2n$. On procède à une série de tirages sans remise. 0887-24

1. Calculer la probabilité que les boules impaires soient tirées exactement dans l'ordre $1, 3, \ldots, 2n-1$.

2. On note X la variable aléatoire égale au numéro du tirage à l'issue duquel on a tiré toutes les boules de numéros impairs.

Déterminer la loi et l'espérance de X.

Exercice 118. Soit $\lambda > 0$. On considère deux variables aléatoires X et Y de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, que l'on suppose indépendantes. A077-24

Pour tout $\omega \in \Omega$, on considère la matrice $\mathrm{M}(\omega) = \begin{pmatrix} (-1)^{\mathrm{X}(\omega)} & 1 \\ (-1)^{\mathrm{Y}(\omega)} & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la probabilité que M soit inversible.

2. Calculer la probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

3. Calculer la probabilité que M soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

4. Mêmes questions pour la matrice $\mathrm{K} = \begin{pmatrix} \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} \end{pmatrix}$.

Exercice 119. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda_1)$ et $\mathcal{P}(\lambda_2)$. A063-24
Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\{-1, 1\}$. On pose $p = \mathbb{P}(Y = -1)$.
On suppose que X_1, X_2, Y sont mutuellement indépendantes.

On introduit la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_2^2 \\ YX_2^2 & X_1^2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer la probabilité que M soit diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Calculer la probabilité que χ_M soit scindé sur $\mathbb{R}$.

3. Dans cette question, on suppose que M est diagonalisable. Exprimer ses puissances.

4. Étudier la convergence de la suite matricielle de terme général $\sum_{k=0}^{n} \frac{M^k}{k!}$.

0909-24

Exercice 120. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$. On pose $Y = \left\lfloor \frac{X+1}{2} \right\rfloor$.

1. Montrer que Y suit une loi géométrique.

2. Vérifier que les variables aléatoires Y et $2Y - X$ sont indépendantes.

Exercice 121. On considère une suite $(X_n)_{n \geqslant 1}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes de loi uniforme sur $\{-1, +1\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose S002-23

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

En particulier, la variable aléatoire S_0 est nulle. On note T le temps de retour en 0 (éventuellement infini), c'est-à-dire

$$T(\omega) = \min\{n \in \mathbb{N}^* \ ; \ S_n = 0\}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $E_n = (T > n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on pose

$$A_k^n = (S_k = 0) \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} (S_i \neq 0).$$

On pose enfin $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0)x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(E_n)x^n$.

a. Vérifier que f et g sont bien définies sur $[0, 1[$.

b. Soient deux entiers k et n tels que $1 \leqslant k < n$. Montrer que $(S_{k+1} - S_k, \ldots, S_n - S_k)$ et $(S_1, \ldots, S_{n-k})$ ont la même loi.

c. En déduire l'égalité $\mathbb{P}(A_k^n) = \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$ puis simplifier la somme $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0)\mathbb{P}(E_{n-k})$.

d. Pour tout x dans $[0, 1[$, montrer l'égalité $f(x)g(x) = \frac{1}{1-x}$ et en déduire une expression de $g(x)$.

e. Pour tout $x \in [0, 1[$, montrer l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T = n)x^n = 1 - \sqrt{1 - x^2}$.

f. En déduire la loi de T. On vérifiera en particulier que T est presque sûrement finie.

g. Calculer l'espérance de T.

Piste noire

Algèbre de première année

Exercice 122. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $a \in [-1, 1]$. A122-24

Montrer que les racines complexes du polynôme $X^{n+1} - aX^n + aX - 1$ sont de module 1.

Exercice 123. On considère deux polynômes $P = aX + b$ et $Q = cX + d$ de $\mathbb{R}_1[X]$. 0434-24
Soit un entier $n \geqslant 1$. On définit un endomorphisme Φ de $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \Phi(X^k) = P^k Q^{n-k}.$$

Calculer dét(Φ).

Exercice 124. On considère des nombres réels $x_0, \dots x_n$ tous distincts. 0223-24

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note ℓ_k la forme linéaire $P \mapsto P(x_k)$ sur $\mathbb{R}_n[X]$.

1. Montrer que $(\ell_0, \dots, \ell_n)$ est une base de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.

2. Montrer qu'il existe un unique $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \int_0^1 P(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(x_k).$$

Exercice 125. Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. 1012-24

1. Soient $v \in \mathcal{L}(E, G)$ et $f \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer l'équivalence

$$\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(f) \iff \exists u \in \mathcal{L}(E, F), \quad v = f \circ u.$$

2. Soient $v \in \mathcal{L}(E, G)$ et $(f_1, \dots, f_k) \in \mathcal{L}(F, G)^k$. Montrer l'équivalence

$$\mathrm{Im}(v) \subset \sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(f_i) \iff \exists (u_1, \dots, u_k) \in \mathcal{L}(E, F)^k, \quad v = \sum_{i=1}^{k} f_i \circ u_i.$$

Algèbre de deuxième année

Exercice 126. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. 0224-24

1. On suppose que la matrice $A + iB$ est inversible. Montrer qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $A + tB$ soit inversible.

2. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'elles sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 127. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible. Montrer que AB et BA ont le même spectre. A052-18

Montrer que c'est encore vrai si A n'est pas inversible.

Exercice 128. Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On fait l'hypothèse 0380-18

$$\chi_A = \prod_{k=1}^{n} (X - a_{k,k}).$$

Montrer que la matrice A est diagonale.

Exercice 129. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que les matrices ${}^t\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}$ et $\mathrm{A} \cdot {}^t\mathrm{A}$ sont semblables. 0379-18

Exercice 130. On considère une application $\mathrm{A} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$ telle que $\mathrm{A}(0) = \mathrm{A}(1) = \mathrm{I}_n$ et A041-24

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{A}(s+t) = \mathrm{A}(s)\mathrm{A}(t).$$

1. Trouver des exemples de telles applications.
2. Montrer que ce sont les seules applications vérifiant ces propriétés.

Exercice 131. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$. On suppose que A007-24

$$\mathrm{tr}(\mathrm{A}) = 3, \quad \mathrm{tr}(\mathrm{A}^2) = 5, \quad \mathrm{tr}(\mathrm{A}^3) = 9.$$

On note U l'ensemble des matrices $\mathrm{M} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{tr}(\mathrm{AM}) = 1$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^2\mathrm{M}) = 3$.

Déterminer $\min \big\{ \mathrm{tr}(\mathrm{M}^2) \ ; \ \mathrm{M} \in \mathrm{U} \big\}$.

Exercice 132. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$. A050-24

On suppose que

$$\forall s > 0, \quad \mathrm{tr}((\mathrm{A} + s\mathrm{I}_2)^{-1}) = \mathrm{tr}((\mathrm{B} + s\mathrm{I}_2)^{-1}).$$

Montrer que A et B sont semblables.

Exercice 133. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $\mathrm{B} \in \mathrm{A}_n(\mathbb{R})$. A098-24

Montrer que AB est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Indications.

- Commencer par le cas $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.
- Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ stable par B, alors $\mathrm{F}^\perp$ est également stable par B.
- Étant donné un tel F, si on représente l'endomorphisme de F induit par B dans une base orthonormée de F, montrer que la matrice obtenue est antisymétrique.
- Procéder par récurrence sur n.

Analyse de première année

Exercice 134. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On suppose que cette suite est *sous-additive*, c'est-à-dire 0174-15

$$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^2, \qquad a_{m+n} \leqslant a_m + a_n,$$

et que la suite $(a_n/n)_{n\geqslant 1}$ est minorée. Prouver que la suite $(a_n/n)_{n\geqslant 1}$ est convergente.

Exercice 135. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. A003-24

On suppose que f'' est bornée sur $\mathbb{R}$ et que f tend vers 0 en $+\infty$.

Montrer que f' tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 136. On définit une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en prenant $u_0 > 0$ et en posant $u_{n+1} = u_n - \mathrm{e}^{-1/u_n}$. A004-24

a. Montrer que cette suite est bien définie puis qu'elle converge, et préciser sa limite.

b. Pour tout $\alpha > 0$, montrer que la suite $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 137. Étudier la suite complexe de terme général $z_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{\mathrm{i}}{k}\right)$. 1084-24

Analyse de deuxième année

0240-24

Exercice 138. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin^2(n)}{n}$.

0241-24

Exercice 139. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle positive sommable.

Pour tout $x > 0$, montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{a_n^x}{n}$ converge.

A055-24

Exercice 140. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $r > 0$, on pose

$$\mathrm{I}_r f(x) = \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} f(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_r f(x) = \frac{1}{2r}\int_{x-r}^{x+r} |f(y) - \mathrm{I}_r f(x)|\ \mathrm{d}y.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose enfin $\bar{\mathrm{T}} f(x) = \sup\{\mathrm{T}_r f(x)\ ;\ r > 0\}$.

1. Montrer que si f est bornée sur $\mathbb{R}$, alors la fonction $\bar{\mathrm{T}} f$ l'est aussi.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, tout $c \in \mathbb{R}$ et tout $r > 0$, prouver la majoration

$$|\mathrm{T}_r f(x)| \leqslant \frac{1}{r}\int_{x-r}^{x+r} |f(y) - c|\ \mathrm{d}y.$$

3. Trouver des exemples de fonctions f pour lesquelles $\bar{\mathrm{T}} f(0) = +\infty$.

A080-24

Exercice 141. Pour tout $x \in]-1,1[$, prouver l'égalité $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\ \mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^k$.

En déduire la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} (\zeta(2k) - \zeta(2k+1))$.

A089-24

Exercice 142. On note E l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telles que la fonction $x \mapsto (1+x^2)\left(|f(x)| + |f'(x)| + |f''(x)|\right)$ soit bornée.

Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et tout $t \in \mathbb{R}$, on définit les fonctions

$$\mathrm{A}_t(f) : x \mapsto f'(x) + txf(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_t^*(f) : x \mapsto -f'(x) + txf(x).$$

1. Pour tout couple (f,g) d'éléments de E, montrer l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g \times \mathrm{A}_t(f)$.

2. Pour tout couple (f,g) d'éléments de E, montrer l'égalité $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{A}_t^*(g) \times f = \int_{\mathbb{R}} g \times \mathrm{A}_t(f)$.

3. Pour tout élément f de E, montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \mathrm{A}_t^*(\mathrm{A}_t(f)) \times f \geqslant 0$.

4. Pour tout élément f de E, montrer l'inégalité

$$\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2\ \mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 4\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)^2\ \mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f'(x)^2\ \mathrm{d}x\right).$$

5. Cette majoration peut-elle être une égalité ?

0860-24

Exercice 143. Déterminer les extremums de $f : (x,y) \mapsto \min(x,y)(1-\max(x,y))$ sur $[0,1]^2$.

Autres thèmes

Exercice 144. Calculer le nombre de diviseurs dans $\mathbb{N}^*$ de 1 000 000. 0382-15

Exercice 145. Étant donné deux parties B et C non vides de $\mathbb{R}$, on définit 0219-24

$$\mathrm{B} + \mathrm{C} = \{b + c\ ;\ (b, c) \in \mathrm{B} \times \mathrm{C}\}.$$

Étant donné une partie A de $\mathbb{R}$, on définit ensuite les ensembles $k\mathrm{A}$ par la relation de récurrence $(k+1)\mathrm{A} = k\mathrm{A}+\mathrm{A}$.

On considère une partie A de $\mathbb{R}$ de cardinal n.

1. Montrer l'encadrement $2n - 1 \leqslant 2\mathrm{A} \leqslant n(n + 1)/2$. Montrer que cet encadrement est optimal.

2. Trouver un encadrement similaire pour $k\mathrm{A}$ dans le cas général.

Exercice 146. Étant donné 13 nombres réels distincts, montrer qu'il en existe deux parmi eux, notés x et y, tels que 0986-24

$$0 \leqslant \frac{x - y}{1 + xy} \leqslant 2 - \sqrt{3}.$$

Exercice 147. Soient n et N deux entiers strictement positifs tels que $n \leqslant \mathrm{N}$. A081-24

1. Quel est le nombre de permutations de $[\![1, \mathrm{N}]\!]$?

2. On considère une partie A de $[\![1, \mathrm{N}]\!]$ de cardinal n ainsi qu'une permutation σ de $[\![1, \mathrm{N}]\!]$ choisie aléatoirement. Déterminer la probabilité de l'événement $(\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} = \mathrm{A})$.

Exercice 148. Soit $p \in]0, 1[$. On considère une pièce de monnaie qui réalise `pile` avec une probabilité p. P001-24

On lance la pièce jusqu'à obtenir `pile`. Le rang du lancer auquel `pile` est obtenu est noté ℓ.

On lance alors ℓ fois un dé à 6 faces. Une victoire à ce jeu consiste à avoir obtenu exactement une fois le chiffre 6.

Déterminer la valeur de p pour laquelle la probabilité de victoire est maximale.

Exercice 149. On note c_n le nombre de listes $(a_1, \ldots, a_n)$ obtenues comme permutations de $(1, \ldots, n)$ telles que 0469-24

$$\forall i \in [\![1, n - 1]\!], \quad a_{i+1} \neq a_i + 1.$$

1. Pour tout entier $n \geqslant 3$, montrer que $c_n = (n - 1)c_{n-1} + (n - 2)c_{n-2}$.

2. Montrer que la suite $\left(\dfrac{c_n}{n!}\right)_{n\geqslant 2}$ possède une limite non nulle.

Exercice 150. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires réelles discrètes à valeurs positives. On suppose que X_1 et X_2 ont la même loi et qu'elles sont indépendantes. 0143-17
On suppose de plus que $\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2$ a la même loi que $2\mathrm{X}_1$. Montrer que X_1 est presque sûrement constante.

Exercice 151. Pour tout $\lambda > 0$, on se donne des variables aléatoires $\mathrm{A}_\lambda, \mathrm{B}_\lambda, \mathrm{C}_\lambda$ indépendantes de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. 0192-17

a. Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbb{P}(|\mathrm{A}_\lambda - \lambda| \geqslant \varepsilon\lambda)$ tend vers 0 lorsque λ tend vers $+\infty$.

b. Déterminer la limite quand λ tend vers $+\infty$ de la probabilité de l'événement « Le polynôme $\mathrm{A}_\lambda \mathrm{X}^2 + \mathrm{B}_\lambda \mathrm{X} + \mathrm{C}_\lambda$ a toutes ses racines réelles. ».

Exercice 152. Soient A et B deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{G}(p)$. 0365-17

Déterminer la probabilité que toutes les solutions de l'équation différentielle $y'' + (\mathrm{A} - 1)y' + \mathrm{B}y = 0$ aient une limite nulle en $+\infty$.
