

# Révisions

## Électricité

### 1. Caténaire d'alimentation ferroviaire (Y. Azakraoui)

Une motrice de TGV est alimentée en haute tension alternative, de fréquence 50 Hz, selon le schéma de la figure 1. À intervalles réguliers, des sous-stations d'alimentation distantes de  $l = 50$  km, assimilées à des générateurs idéaux de fem efficace  $U_e = 25$  kV, alimentent la caténaire formée d'un câble de cuivre de conductivité  $\gamma = 6,0 \cdot 10^7$  S.m<sup>-1</sup> et de section  $s$ . La locomotive consomme un courant d'intensité efficace  $I_e = 0,35$  kA quelle que soit sa position  $x$  sur la ligne. Le retour du courant vers les sous-stations s'effectue par les rails et le sol dont on néglige la résistance électrique. On note  $P_0 = U_e I_e$  la puissance moyenne qui serait consommée par la locomotive si elle était directement branchée sur une sous-station d'alimentation.

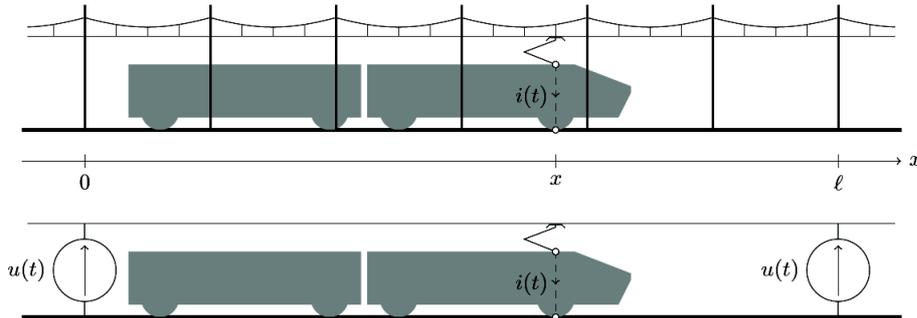
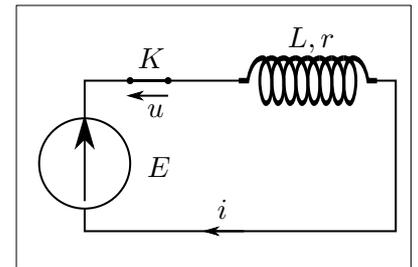


FIGURE 1 – Alimentation d'un TGV

1. Exprimer la puissance moyenne  $P(x)$  consommée par la rame lorsque la locomotive se trouve à l'abscisse  $x$ .
2. Pour un bon fonctionnement et limiter l'échauffement de la caténaire on impose  $P > 0,98 P_0$  quelle que soit la position du train. En déduire la valeur minimale  $s_{min}$  de la section du câble de cuivre.

### 2. Arc électrique de rupture (M. Bakkouch)

Les machines électriques utilisées en milieu industriel comportent fréquemment des bobinages et présentent, pour cette raison, un comportement inductif. La coupure brutale du courant dans de tels système pose quelques difficultés puisqu'il faut dissiper en très peu de temps l'énergie magnétique emmagasinée. À haute intensité, des étincelles et des arcs électriques peuvent apparaître et endommager les interrupteurs. Pour modéliser cette situation, considérons un circuit électrique formé d'une bobine d'inductance  $L = 2$  H et de résistance  $r = 100 \Omega$  placée en série avec une source de tension de fem  $E$  et un interrupteur  $K$ .



1. Le circuit étant depuis longtemps en fonctionnement, quelle est l'expression de l'intensité  $i_0$  qui circule dans le circuit ? En introduisant une constante de temps  $\tau$ , préciser ce qui signifie l'expression « depuis longtemps ».
2. Savez-vous ce que l'on appelle « étincelle de rupture » dans un circuit inductif et connaissez-vous l'interprétation qualitative de ce phénomène ?
3. À  $t = 0$ , on ouvre l'interrupteur. Malheureusement, son comportement n'est pas celui qu'on attend car l'air entre les contacts s'ionise et devient conducteur. La caractéristique de l'interrupteur est définie par la relation

$$u = u_m + \frac{a}{b + i} \quad \text{avec} \quad u_m = 40 \text{ V}, \quad a = 40 \text{ V.A} \quad b = 0,04 \text{ A} \quad .$$

Elle est représentée sur la figure 2.

Est-il possible que l'on obtienne, quelque temps après l'ouverture de l'interrupteur, un nouveau régime permanent dans lequel une intensité non nulle se maintient ? Discuter selon la valeur de  $E$  et déterminer une valeur

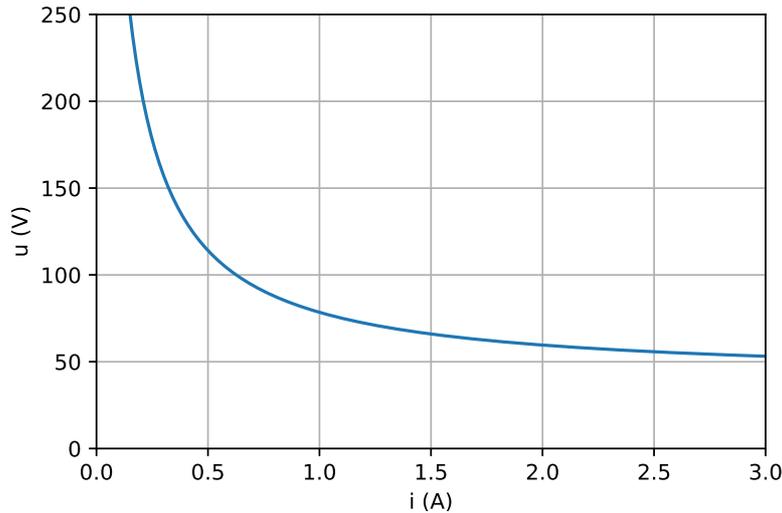


FIGURE 2 – Caractéristique d'un arc électrique

critique  $E_c$  séparant deux types de comportement, l'un possédant un unique point de fonctionnement et l'autre en possédant deux.

Pour répondre à cette question, on raisonnera en cherchant le point de fonctionnement du système formé de l'arc d'une part et du générateur en série avec la bobine d'autre part. Au choix, une méthode graphique et une méthode calculatoire sont permises.

- On suppose dans cette question  $E < E_c$  et on étudie le régime transitoire qui suit l'ouverture de l'interrupteur. Écrire l'équation différentielle régissant l'évolution de  $i(t)$  et montrer que l'intensité décroît jusqu'à s'annuler. Représenter le déplacement du point de fonctionnement dans le diagramme de la figure (2).
- Montrer que le temps d'extinction du courant est donné par

$$T = \tau \int_1^0 \frac{dx}{1 - x - \gamma - \frac{\alpha}{\beta+x}}$$

avec  $\alpha = a/(ri_0^2)$ ,  $\beta = b/i_0$ ,  $\gamma = u_m/E$ . Pour  $E = 80 \text{ V}$ , cette intégrale vaut 0,73. Calculer numériquement  $T$ .

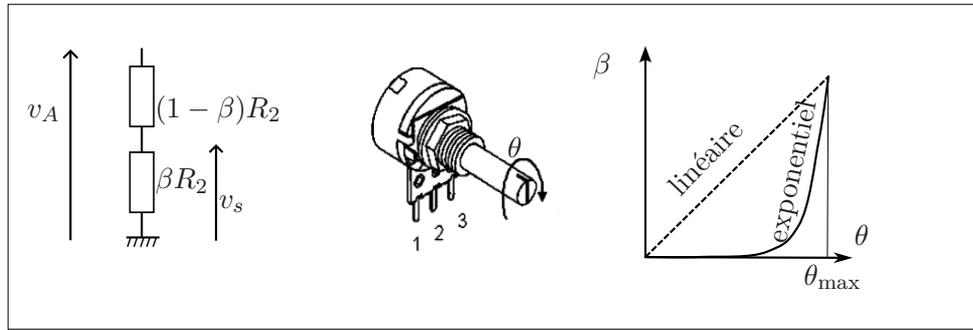
- On suppose maintenant  $E > E_c$ . En utilisant l'équation différentielle du circuit, discuter la stabilité des deux points de fonctionnement. Lequel observera-t-on expérimentalement ?

Remarque : on peut à nouveau exprimer sous forme intégrale le temps d'établissement du régime permanent. Il semble que l'intégrale soit divergente, ce qui n'est pas impossible puisque la fin est définie par l'annulation du dénominateur ...

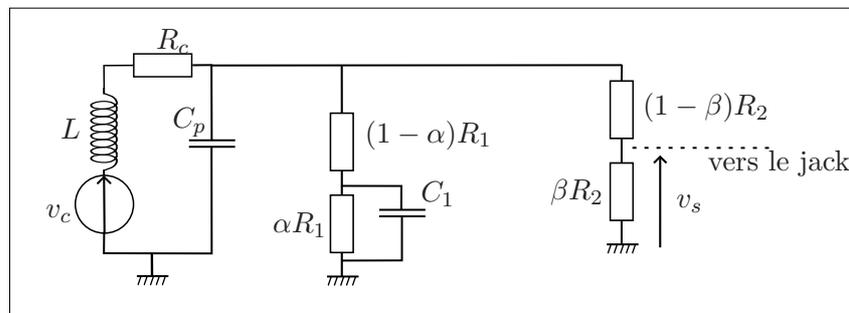
### 3. Filtre pour guitare électrique (F. Xu)

Sur une guitare électrique, un « micro » produit un signal électrique reflétant le mouvement des cordes près desquelles il est placé. Avant d'être envoyé à un haut-parleur pour produire un son, ce signal subit divers traitements électroniques dont cet énoncé donne un aperçu *extrêmement simplifié*.

- Le circuit électronique comporte plusieurs étages dont l'un est représenté ci-dessous, avec une tension d'entrée  $v_A$  et une tension de sortie  $v_s$ . Les résistances  $\beta R_2$  et  $(1 - \beta)R_2$  sont réalisées ensemble à partir d'un potentiomètre, composant à trois bornes muni d'un bouton rotatif qui permet à l'utilisateur de modifier la valeur de  $\alpha$  en faisant tourner un bouton rotatif. Quel est le rôle de cet étage ?



- Sur certains potentiomètres,  $\beta$  varie linéairement avec l'angle de rotation  $\theta$  du bouton ( $\alpha = \theta/\theta_{\max}$ ). Sur d'autres, il varie de manière exponentielle, sous la forme approximative  $\alpha = e^{q(\theta-\theta_{\max})}$  avec  $q \in \mathbb{R}^+$ . Lequel des deux types est préférable si on souhaite contrôler confortablement le niveau sonore émis par l'instrument ?
- Le montage complet est représenté ci-dessous. L'inductance  $L$ , la capacité  $C_p$  et la résistance  $R_c$  représentent le micro placé sous la corde et  $v_c$  la fem produite par son mouvement. Les résistances  $\alpha R_1$  et  $(1 - \alpha)R_1$  sont à nouveau réglables au moyen d'un potentiomètre. Selon vous, quel est le rôle (l'intérêt musical) de la partie du montage comportant ces résistances et le condensateur de capacité  $C_1$  ?



- Plutôt que de chercher la forme explicite de la fonction de transfert  $\underline{H} = v_s/v_c$  de ce montage, nous allons en calculer un tableau de valeurs grâce à un code Python, puis représenter graphiquement le gain. Pour cela, on introduit les valeurs numériques de tous les composants, puis les fréquences et pulsations utiles par les instructions `f = np.logspace(1, 5, 10000)` ; `omega = 2 * np.pi * f`. Puis on procède étape par étape aux calculs pertinents jusqu'à obtenir les valeurs de  $\underline{H}$ . Par exemple, l'impédance du condensateur est donnée par la ligne `Z_C1 = 1 / (1J * C1 * omega)`. En suivant cette méthode, compléter le code `trace_bode_guitare_elec_eleve.py` puis tracer le diagramme de Bode.
- Utiliser ce code pour commenter les influences de  $\alpha$ ,  $\beta$ , et  $R_1 = R_2$  (les deux potentiomètres sont supposés identiques)
- La sortie de ce montage est envoyée sur un jack d'impédance d'entrée égale à 1 mégohm. Que cela vous inspire-t-il ?

#### 4. Réalisation approchée d'une fonction retard (M. Bédel)

- On désire réaliser un système électronique linéaire réalisant une fonction retard, c'est à dire telle que l'entrée  $e$  et la sortie  $s$  soient en régime permanent liées par une relation du type

$$s(t) = e(t - \tau)$$

où  $\tau$  est le retard, valeur fixée indépendante de la fréquence. Quelle doit être la fonction de transfert  $\underline{F}(j\omega)$  de ce système ? Tracer son diagramme de Bode.

- En supposant  $\omega\tau \ll 1$ , effectuer un développement limité à l'ordre 2 de  $\underline{F}(j\omega)$ .
- Pour réaliser cette fonction, on utilise le dispositif schématisé sur la figure 3. La résistance  $R$  représente la charge (le dipôle d'utilisation) sur laquelle le retardateur est branché. Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}$  de ce système. De quel type de filtre s'agit-il ?
- En se plaçant dans la limite des basses pulsations, effectuer un développement au second ordre de  $\underline{H}$  en puissances de  $\omega$ .

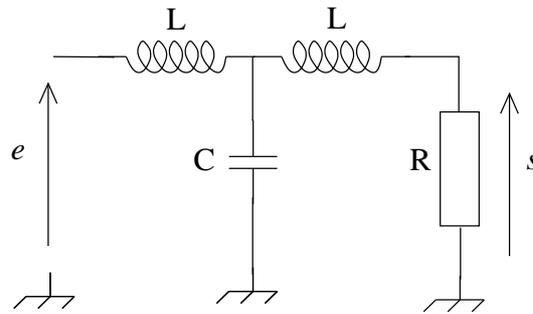


FIGURE 3 –

5. Montrer que si l'on choisit convenablement  $R$ , ce filtre réalise de manière approchée le retardateur envisagé dans la première question. Que vaut alors  $\tau$  ?

### 5. Une technique de mesure de déphasage (M. Benoit)

Le montage représenté sur la figure 4 fait intervenir des ALI supposés idéaux et fonctionnant en régime linéaire. Il met aussi en jeu des diodes dont la caractéristique est définie par l'équation  $i = i_0 (\exp(v/v_0) - 1)$ , les orientations de  $v$  et de  $i$  étant définies sur la figure. Toutes les résistances présentent la même valeur  $R = 100 \text{ k}\Omega$ .

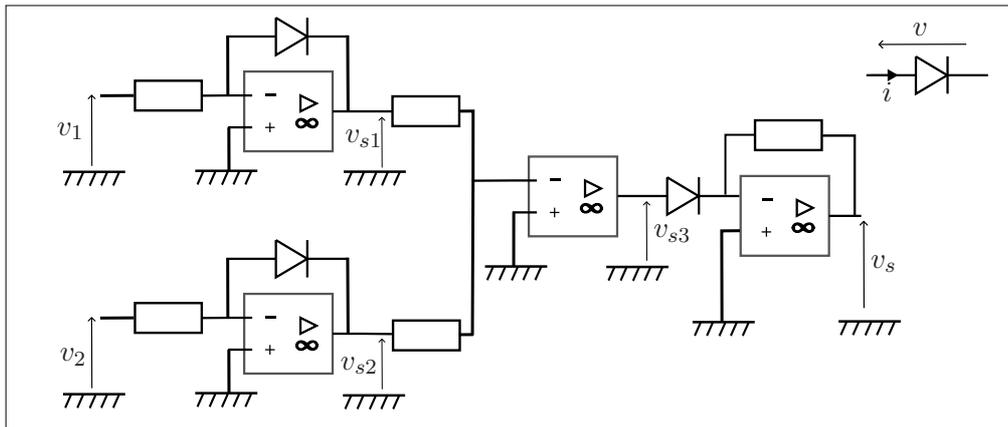


FIGURE 4 – Montage faisant intervenir des ALI et des diodes

1. Exprimer  $v_{s1}$  et  $v_{s2}$  en fonction de  $v_1$  et  $v_2$  respectivement.
2. Exprimer  $v_{s3}$  fonction de  $v_{s1}$  et  $v_{s2}$ .
3. Trouver enfin l'expression de  $v_s$  en fonction de  $v_1$  et  $v_2$ .
4. Commenter et analyser sommairement l'hypothèse selon laquelle les ALI fonctionnent en régime linéaire. Le montage dans son ensemble est-il linéaire ?
5. On prend  $v_1 = A \cos \omega t$  et  $v_2 = B \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $A$ ,  $B$  et  $\omega$  étant supposés connus. Quel traitement faut-il appliquer à  $v_s$  pour en déduire  $\varphi$  ?

## Mécanique

### 6. Fermeture des orbites quasi-circulaires (A. Carpentier, M. de Goede, J. Dequenne)

On considère dans ce problème un point matériel  $M$  de masse  $m$  se déplaçant sous l'action d'une unique force de la forme

$$\vec{F} = -k r^n \vec{u}_r = -k OM^n \frac{\overrightarrow{OM}}{OM}$$

avec  $n \in \mathbb{R}$  et  $k > 0$ . Dans un tel champ de forces, des trajectoires circulaires sont bien entendu envisageables, mais ce ne sont pas les seules. On souhaite savoir à quelle condition, portant sur  $n$ , d'autres trajectoires

périodiques sont possibles. On va répondre à cette question en restreignant l'étude aux orbites proches d'un cercle.

1. Pour  $n = 1$ , montrer en utilisant les coordonnées cartésiennes que le mouvement de  $M$  est elliptique ; exprimer sa période  $T$  et sa pulsation  $\omega$ . Donner les équations horaires du mouvement dans le cas où le point  $M$  se trouve initialement en  $(r_0, 0, 0)$  avec une vitesse  $(0, v_0, 0)$ . À quelle condition obtient-on une orbite circulaire ?

2. Pour  $n = -2$ , retrouver l'expression de la période du mouvement lorsque la trajectoire est circulaire de rayon  $r_0$ . Quel autre de type de trajectoire fermée peut-on rencontrer ? Comment la période  $T$  est-elle alors liée à une grandeur définissant l'extension spatiale de cette trajectoire ?

3. On suppose dorénavant  $n$  quelconque. Pourquoi peut-on restreindre l'étude à un plan ? À quelle condition liant la vitesse initiale  $v_0$  et la distance initiale  $r_0$  le mouvement est-il circulaire ? Comment s'expriment alors sa période et sa pulsation ?

4. On suppose maintenant que la vitesse initiale possède une composante radiale  $v_{0r}$  et une composante orthoradiale  $v_{0\theta}$ , cette dernière vérifiant la condition explicitée dans la question précédente

$$\vec{v}_0 = v_{0r} \vec{u}_r + v_{0\theta} \vec{u}_\theta \quad .$$

Pour étudier le mouvement, on utilise le concept d'énergie potentielle efficace.

- Comment s'exprime l'énergie potentielle ?
  - Justifier que le produit  $C = r^2 \dot{\theta}$  est constant au cours du mouvement. Exprimer  $C$  en fonction des conditions initiales.
  - Exprimer l'énergie mécanique en faisant intervenir les constantes du problème ainsi que  $r, \dot{r}$ , mais pas  $\dot{\theta}$ .
  - Donner l'expression de l'énergie potentielle efficace  $E_{\text{peff}}(r)$ . Tracer schématiquement son graphe pour  $n = 1, n = -2$  et  $n = -4$ .
  - Sur ces graphes, indiquer quelle abscisse correspond à une orbite circulaire
5. Lorsque  $v_{0r} \ll v_{0\theta}$ , le mouvement reste très proche d'une orbite circulaire et on pose  $r = r_0 + \epsilon$  avec  $\epsilon \ll r_0$ . En utilisant le graphique précédent, décrire le mouvement et représenter l'allure de la trajectoire.
6. Montrer que

$$E_{\text{peff}}(r) \simeq E_{\text{peff}}(r_0) + \frac{\epsilon^2}{2} \left( \frac{3mC^2}{r_0^4} + kn r_0^{n-1} \right) = E_{\text{peff}}(r) \simeq E_{\text{peff}}(r_0) + k(n+3) r_0^{n-1} \frac{\epsilon^2}{2}$$

7. Étudier le mouvement radial, c'est à dire l'évolution temporelle de  $\epsilon(t)$ . À quelle condition l'orbite circulaire est-elle stable ? Lorsqu'elle l'est, exprimer la période  $T_\epsilon$  des oscillations radiales.

8. Au premier ordre en  $\epsilon$ , le mobile décrit une révolution complète autour de l'origine pendant la période  $T$  exprimée dans la question 3. Dans le même temps,  $\epsilon$  et  $r$  évoluent périodiquement. À quelle condition la trajectoire est-elle fermée, c'est à dire repasse par le même point après un tour ?

9. Vérifier que cette condition est satisfaite pour  $n = 1$  et  $n = -2$ . On pourra illustrer les résultats en utilisant un calcul numérique codé dans le fichier Python `resout_perturbation_mvt_circulaire.py`.

## 7. Mouvement d'un électron dans un magnétron (M. Diop)

Le magnétron est un accélérateur de particules qui équipe notamment les fours à micro-ondes en jouant le rôle de source de rayonnement. Il est formé de deux cylindres conducteurs coaxiaux de rayons  $R_1$  et  $R_0 < R_1$  entre lesquels on impose une ddp  $U = V_1 - V_0 > 0$ . Ils sont séparés par une région vide où règne un champ magnétique constant uniforme parallèle à leur axe de révolution. Un électron de charge  $q = -e$ , émis sans vitesse en  $r = R_0$ , migre vers l'électrode de potentiel  $R_1$ . On repère son mouvement en coordonnées polaires.

- Déterminer le potentiel électrostatique et le champ électrique dans le magnétron.
- Montrer que dans le mouvement de l'électron, la quantité  $mr^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}qBr^2$  est conservée et trouver son expression.
- Justifier que l'énergie mécanique se conserve et en donner une expression en fonction notamment de  $r, U, \dot{\theta}, \dot{r}$ .

4. Éliminer  $\dot{\theta}$  et introduire une énergie potentielle efficace. L'utiliser pour discuter qualitativement le mouvement radial de l'électron. Exprimer la valeur minimale de  $U$  permettant à l'électron d'atteindre l'électrode de rayon  $R_1$  et la calculer numériquement pour  $R_0 = 3$  cm,  $R_1 = 4$  cm,  $B = 0,2$  T. On rappelle  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg et  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C.
5. Analyser la situation en utilisant le code python `resout_magnetron_polaires.py` fourni à cet effet.

### 8. Distribution de vitesse et de masse dans une galaxie (V. Dubus)

On considère une galaxie à symétrie sphérique formée de particules toutes identiques de masse  $m$  et de densité particulaire volumique  $n(r)$ ,  $r$  désignant la distance au centre  $O$ .

- Exprimer le champ de gravité  $\vec{g}$  à la distance  $r$  du centre de la galaxie. Le résultat fait intervenir une intégrale qu'on ne cherchera pas pour l'instant à expliciter.
- Les particules décrivent des cercles de centre  $O$ . Exprimer leur vitesse  $v(r)$ .
- On propose trois expressions de  $n$ .

$$n_1(r) = n_0 \quad n_2(r) = n_0 e^{-r/a} \quad n_3(r) = n_0 \frac{a^2}{r^2} \quad .$$

Expliciter  $v(r)$  dans chaque cas. On donne

$$\int x^2 e^{-x} dx = -2(e^{-x} + x e^{-x}) - x^2 e^{-x} \quad .$$

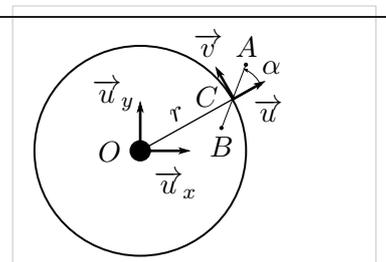
- Les courbes de la figure 5 représentent des profils de vitesses  $v$  pour la galaxie NGC3198. Les carrés correspondent à des valeurs mesurées, la courbe « disk » à des vitesses associées à la seule matière visible, c'est à dire aux étoiles de la galaxie, et la courbe « dark halo » à un halo de matière sombre. Laquelle de ces courbes peut-on associer à l'une des densités  $n_1$ ,  $n_2$  ou  $n_3$  ?
- Dans ce modèle, quel est le comportement de  $v$  attendu pour  $r$  suffisamment grand ? En déduire la masse de la galaxie, mesurée en masses solaires.
- Expliquer pourquoi les données expérimentales invitent à introduire de la matière sombre. Déduire des données expérimentales le comportement asymptotique de la densité  $n_s(r)$  de cette matière.
- Vous disposez d'un code Python calculant (à un facteur près) et traçant  $v$  pour chacune des trois densités de la question 3, en fonction de la variable adimensionnée  $x = r/a$ .
  - En raisonnant sur la matière visible, déterminer le rayon de la galaxie  $a$ .
  - Proposer une expression pour la densité particulaire sombre  $n_s(r)$ .

Données numériques :  $1 \text{ pc} = 3,1 \cdot 10^{16}$  m, masse solaire  $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$  kg,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  SI.

### 9. Stabilisation d'un satellite par gradient de gravité (H. Fessard)

Un satellite de masse  $2m$  décrit autour de la Terre de masse  $M$  une orbite circulaire de rayon  $r$  à la vitesse angulaire  $\omega$ . Il est formé de deux modules  $A$  et  $B$  de masse  $m$  assimilés à des points matériels liés entre eux par une tige rigide de longueur  $2L$  et de masse négligeable (figure).

Données numériques :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  SI,  $M = 6,0 \cdot 10^{24}$  kg,  $m = 100$  kg,  $L = 5$  m,  $r = 7,0 \cdot 10^3$  km.



- Représenter les forces de gravité s'exerçant sur le satellite. Par une analyse qualitative, trouver les valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles un équilibre relatif est possible, c'est à dire pour lesquelles le satellite conserve la même orientation par rapport à la verticale  $(O, \vec{u})$ .
- En exploitant le fait que  $L$  est très inférieur à  $r$ , exprimer au premier ordre non nul le moment en  $C$  de forces de gravité.
- Le référentiel géocentrique  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est supposé galiléen et on raisonne dans le référentiel  $(C, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .
  - Exprimer les forces d'inertie s'exerçant sur  $A$  et sur  $B$  puis prouver que leur moment global en  $C$  est nul.
  - Écrire l'équation du mouvement régissant l'évolution de l'angle  $\alpha$ .

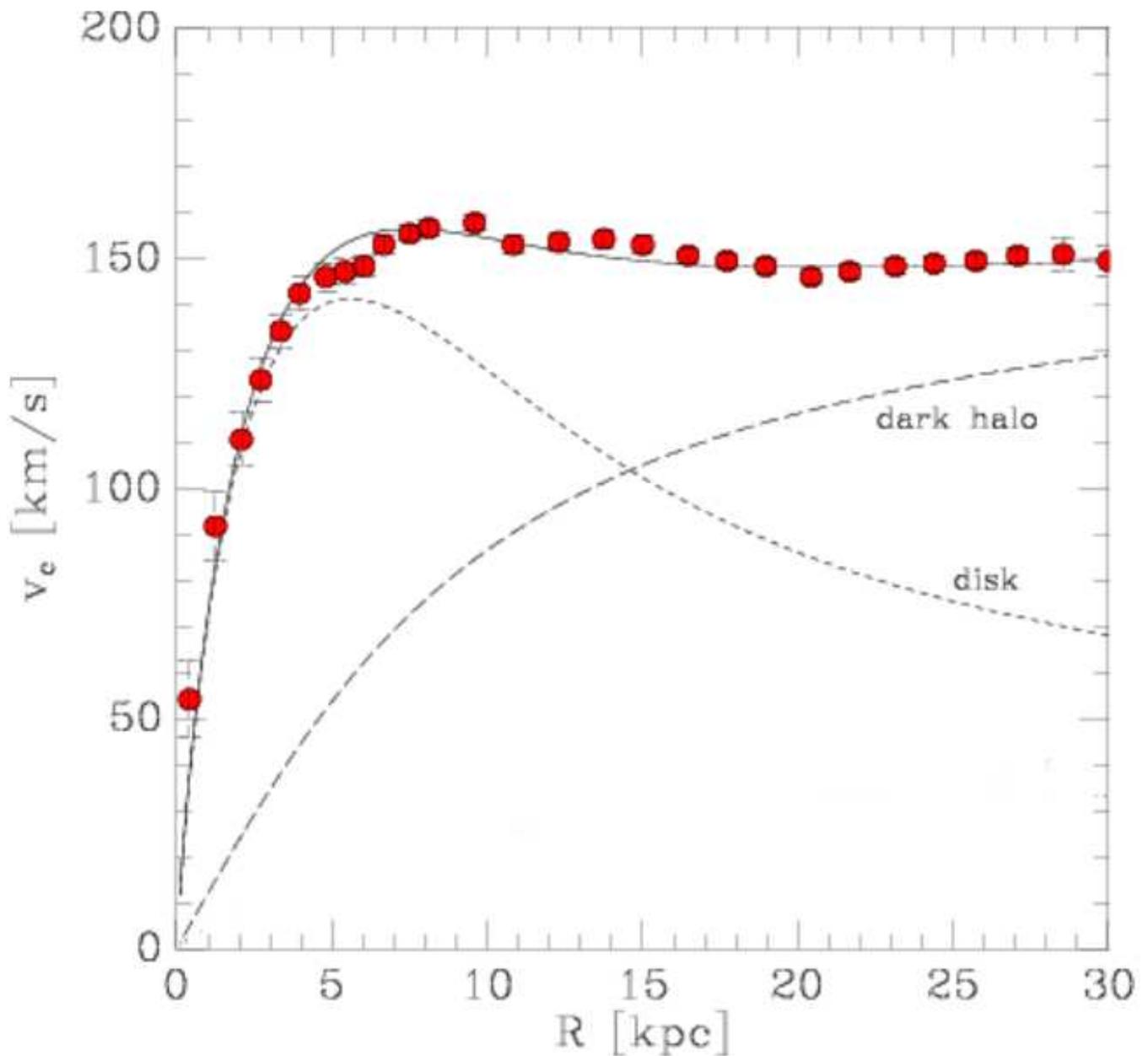


FIGURE 5 – Profils de vitesse dans la galaxie NGC3198. Carrés : valeurs mesurées. Courbe « disk » : associée à la matière visible. Courbe « dark halo » : associée à la matière sombre.

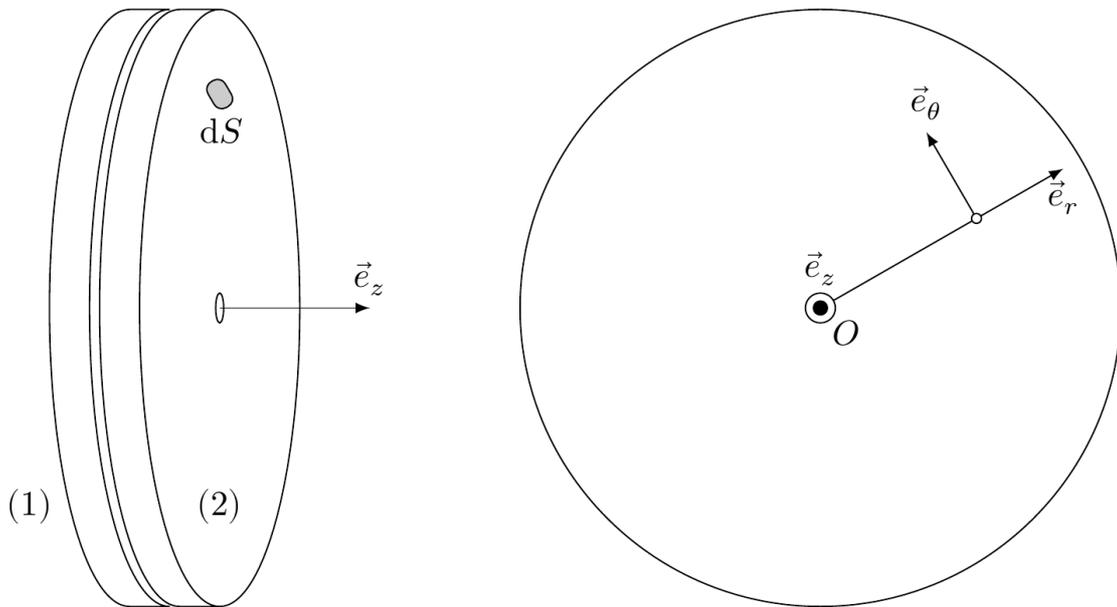
c) Déterminer les positions d'équilibre relatif et discuter leur stabilité. Pour la (ou les) position(s) d'équilibre stable, exprimer la période des oscillations et la calculer numériquement.

4. Reprendre le raisonnement dans le référentiel  $(O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{u}_z)$ .

### 10. Fonctionnement d'un embrayage (Centrale-Supélec) (S. Gégout)

On trouvera en annexe, à la fin de l'énoncé, une explication du rôle d'un embrayage dans une chaîne de transmission mécanique. On modélise un embrayage par deux disques de même rayon  $R$  et de même moment d'inertie  $J$  par rapport à leur axe de rotation commun ( $Oz$ ). Soit  $\vec{F} = F \vec{e}_z$  la force de contact exercée par le disque (1) sur le disque (2) ; la force exercée par un élément de surface d'aire  $dS$  sur l'élément en vis à vis du disque (2) est, en coordonnées polaires d'axe ( $Oz$ ),

$$d\vec{F} = \frac{F}{\pi R^2} dS \vec{e}_z + dF' \vec{e}_\theta \quad .$$



1. Rappeler les lois de Coulomb du frottement de glissement. On notera  $\mu_d$  et  $\mu_s$  les coefficients de frottement, dont on rappellera les définitions, unités et ordres de grandeur. On suppose que le frottement des éléments de surface en contact des disques d'embrayage vérifie ces lois.
2. Quelle est l'expression de  $dF'$  si  $\Omega_1 \neq \Omega_2$ ? On distinguera deux cas. Que peut-on dire si  $\Omega_1 = \Omega_2$ ?

On étudie dans les questions 3 à 5 une phase de démarrage, le dispositif étant embrayé à partir de  $\omega_1(t=0) = \omega_0$  et  $\omega_2(t=0) = 0$ . Le moteur est accouplé au disque (1) et exerce sur celui-ci le couple moteur  $\vec{\Gamma}_1 = \Gamma_1 \vec{e}_z$ . La charge utile du dispositif (les roues du véhicule, etc.), de moment d'inertie  $J'$ , est accouplée au disque (2). On posera  $J_2 = J + J'$ . Cet ensemble mobile est soumis à un couple de frottement  $\vec{\Gamma}_2 = -\Gamma_2 \vec{e}_z$ ;  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  sont supposés constants.

3. Calculer le moment  $\vec{\Gamma}_{12}$  des efforts de contact exercés par (1) sur (2) pendant le patinage.
4. À quelle(s) condition(s) observe-t-on une accélération du véhicule se terminant sans patinage? Quelle serait l'évolution ultérieure du système?
5. Calculer l'énergie dissipée par les frottements pendant la phase de patinage. Que devient-elle?
6. À partir d'un fonctionnement de régime permanent sans patinage, l'arbre moteur tournant à la vitesse angulaire  $\omega_0$ , on déclenche le freinage (sans débrayage) du véhicule. Dans ces conditions, le couple moteur exercé sur le disque (1) est remplacé par un couple de frein moteur  $\vec{\Gamma}_1 = -\Gamma'_1 \vec{e}_z$  et un couple de frottement proportionnel à sa vitesse de rotation s'exerce sur le disque (2),  $\vec{\Gamma}_f = -K\Omega_2 \vec{e}_z$ . À quelle condition l'embrayage ne patinera-t-il pas?

### Annexe sur l'embrayage

L'embrayage est un dispositif d'accouplement entre un arbre dit moteur et un autre dit récepteur. Du fait de sa transmission par adhérence, il permet une mise en charge progressive de l'accouplement ce qui évite les à-coups qui pourraient provoquer la rupture d'éléments de transmission ou l'arrêt du moteur dans le cas d'une transmission avec un moteur thermique. L'embrayage est nécessaire sur les véhicules automobiles à moteurs thermiques qui doivent continuer à tourner même si le véhicule est à l'arrêt. Le désaccouplement facilite aussi le changement de rapport de vitesses. L'embrayage trouve donc sa place sur la chaîne de transmission, entre le moteur et la boîte de vitesses. Le mot « embrayage » désigne également la phase de fonctionnement où l'accouplement est établi; il s'agit de l'opération inverse du « débrayage » pendant laquelle les arbres sont désolidarisés.

On distingue trois phases de fonctionnement pour un dispositif d'embrayage.

- En position embrayée : l'embrayage transmet intégralement la puissance fournie (la voiture roule, le moteur est lié à la boîte de vitesses). C'est le plus souvent la position stable du dispositif (absence d'action de commande).
- En position débrayée : la transmission est interrompue. Roue libre, ou voiture arrêtée, le moteur peut continuer à tourner sans entraîner les roues. La situation est équivalente au point mort.
- Phase transitoire de glissement : en particulier pendant l'embrayage, la transmission de puissance est progressivement rétablie. Ce moment est appelé point de patinage. Pendant cette phase, l'arbre d'entrée et l'arbre de sortie ne tournent pas à la même vitesse.

### 11. Arrimage d'un bateau (M. Gori-Grise)

Un bateau est arrimé par une corde parcourant  $n$  tours ( $n \in \mathbb{R}$ ) d'enroulements sur un bollard fixé sur le quai. L'autre extrémité de la corde est tendue par un marin musclé exerçant une force  $F_0$ . On suppose pour simplifier que la partie enroulée de la corde se trouve dans un plan horizontal dont l'intersection avec le bollard est un cercle de centre  $O$  et de rayon  $a$ . La figure 6 représente schématiquement la situation dans le cas particulier où  $n = 1/2$ . On note  $M_0$  le point où se termine l'enroulement, du côté du marin et on repère un point  $M$  de la corde enroulée par l'angle  $\theta = (\overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{OM})$ .

Lorsque le bateau s'éloigne du quai, la corde se tend et s'immobilise grâce à l'action de l'opérateur. On étudie donc une situation de quasi-équilibre où la corde se trouve à la limite du glissement sur son support.

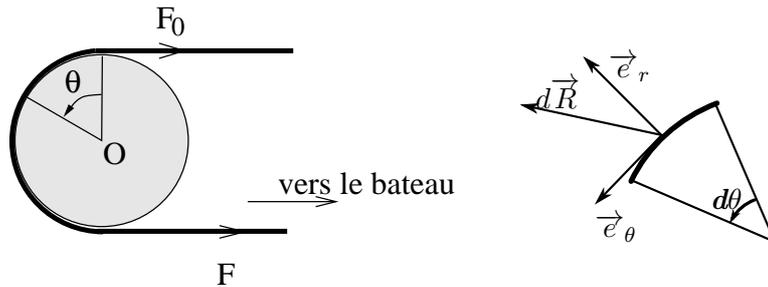


FIGURE 6 – Corde d'arrimage enroulée sur un bollard

1. On décompose la corde en arcs de cercles infinitésimaux vus sous l'angle  $d\theta$ . Chacun subit de la part du bollard des forces de frottement réparties sur sa longueur mais qu'on modélise par une réaction infinitésimale  $d\vec{R}$  ponctuelle obéissant aux lois de Coulomb avec un coefficient  $\mu$ . En exploitant cette modélisation, déterminer la manière dont la tension  $T$  de la corde dépend de  $\theta$ .
2. Si le bateau exerce une force  $F = 10^6$  N sur la corde et si  $\mu = 0,2$ , estimer le nombre de tours nécessaires pour que le marin puisse le retenir.

### 12. Chute d'une tige (A. Coquillard)

Une tige  $AB$  de masse  $m$  et de longueur  $\ell$  tombe sans vitesse initiale à partir de sa position verticale (figure 7). On suppose que le mouvement se produit dans le plan vertical ( $xOy$ ), sans glissement au point  $A$ . Il est repéré par l'angle  $\theta$  représenté sur la figure 7. Le moment d'inertie de la tige par rapport à un axe qui lui est orthogonal et passe par son extrémité vaut  $m\ell^2/3$ .

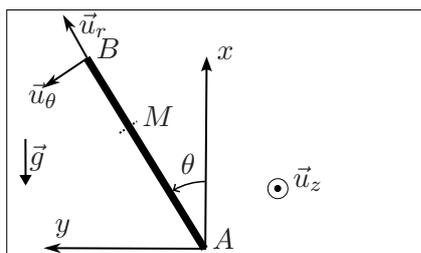


FIGURE 7 – Tige tombant par rotation autour du point  $A$

- a. Exprimer  $\dot{\theta}$  et  $\ddot{\theta}$  en fonction de  $\theta$ .
- b. Exprimer la réaction  $\vec{R}$  du support en fonction de  $\theta$ .

c. Soit  $M$  un point de la tige repéré par la distance  $AM = d$ . Au travers de la section droite du matériau passant par  $M$ , la partie  $BM$  exerce un ensemble de forces de contact sur la partie  $AM$ . Ces forces ont une résultante  $\vec{F} = F_r \vec{u}_r + F_\theta \vec{u}_\theta$  et un moment  $\mathcal{M}_{Mz}$  par rapport à l'axe  $(M, \vec{u}_z)$ . Trouver l'expression de  $\vec{F}$  en fonction de  $m, g, \theta$  et  $u = d/\ell$ .

d. Démontrer l'expression

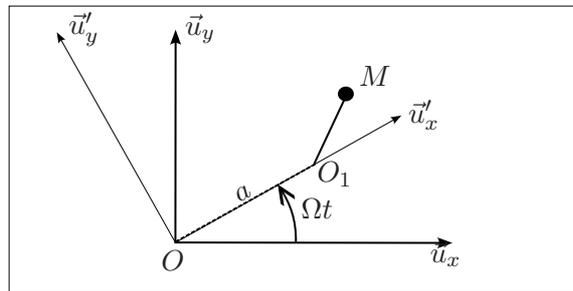
$$\mathcal{M}_{Mz} = -\frac{mgl \sin \theta}{4} u(u-1)^2 \quad .$$

e. Étudier les variations de  $\mathcal{M}_{Mz}$  avec  $u = d/\ell$ .

Faire le lien avec la photographie fournie sur la partie droite de la figure.

### 13. Oscillateur élastique tournant (M. Gravier)

On considère un point matériel  $M$  de masse  $m$  lié à un point  $O_1$  par un élastique de raideur  $k$  et de longueur à vide nulle, exerçant sur lui une force  $\vec{F}_{el} = -k \overrightarrow{O_1 M}$ . Ce point  $O_1$  se déplace dans le plan horizontal  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  en parcourant à la vitesse angulaire  $\Omega$  le cercle de centre  $O$  et de rayon  $a$ . Le contact de  $M$  avec ce plan se fait sans frottement. On pose  $\omega = \sqrt{k/m}$ .



1. Déterminer les positions d'équilibre relatif possibles, c'est à dire celles pour lesquelles  $M$  reste fixe dans le référentiel  $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}'_x, \vec{u}'_y)$ . Discuter selon la valeur de  $\omega$  et représenter ces positions sur un schéma en faisant aussi apparaître les vecteurs forces.

2. Soient  $(x_{eq}, y_{eq})$  les coordonnées d'un point d'équilibre. Dans  $\mathcal{R}'$ , on écrit les coordonnées de  $M$  sous la forme  $x(t) = x_{eq} + \epsilon(t)$ ,  $y(t) = y_{eq} + \eta(t)$ . Écrire les équations de mouvement en utilisant les variables  $\epsilon$  et  $\eta$  (qui ne sont pas supposées petites).

3. Chercher des solutions de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{rt} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \quad .$$

La grandeur inconnue  $r$  peut être complexe, auquel cas  $x$  et  $y$  le sont aussi et la solution cherchée s'obtient en prenant la partie réelle. Il est demandé de trouver  $r$ , mais pas d'exprimer  $\eta(t)$  et  $\epsilon(t)$ .

4. L'équilibre en  $(x_{eq}, y_{eq})$  est stable s'il n'existe aucune solution  $r$  présentant une partie réelle positive. Qu'en est-il ici ? À quel type de mouvement a-t-on affaire ?

5. On choisit  $\Omega = 1 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $\omega = 2 \text{ rad.s}^{-1}$ . Utiliser la fonction `odeint` du module Python `scipy.integrate` pour résoudre les équations du mouvement et pour représenter la trajectoire.

### 14. Forme d'une chaînette en rotation (V. Gueudelot)

Une corde inextensible et sans raideur, de masse  $m$  et de longueur  $\ell$ , est mise en rotation autour d'un axe passant par deux points fixes  $A$  et  $B$  en lesquels ses extrémités sont fixées (figure 8). Tous ses points tournent à la même vitesse angulaire  $\omega$  constante autour de  $(A, \vec{u}_x)$  et, à un instant donné, se situent dans un même plan contenant  $(AB)$ . On peut assez facilement réaliser l'expérience en utilisant une chaînette, en la saisissant entre ses doigts à chaque extrémité et en la faisant tourner en agitant les mains d'un léger mouvement circulaire. La longueur  $d = AB$  est inférieure à  $L$  et on ne suppose pas, comme on le fait dans l'étude des corde vibrantes, que la corde est peu inclinée. Dans ces conditions, la longueur de l'élément infinitésimal situé entre les abscisses

$$x \text{ et } x + dx \text{ est } dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

1. En négligeant la pesanteur, trouver une équation différentielle dont la résolution permettrait de déterminer la forme de la chaînette.

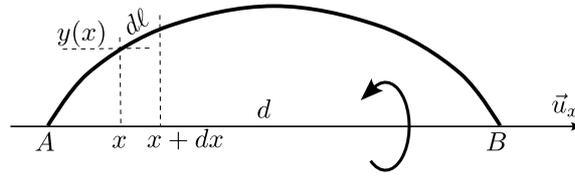


FIGURE 8 – Chaînette en rotation autour d’un axe

2. Combien de constantes interviennent dans la résolution de cette équation ? Écrire les relations permettant de les déterminer.
3. La résolution numérique de ce problème peut être conduite en utilisant la fonction `odeint` du module Python `scipy.integrate`. Compléter les fonctions `construit_membre_de_droite`, `integre_longueur` et `trouve_b` du code `resolution_chainette_tournante_eleve.py`, puis l’exécuter pour résoudre le problème avec  $L = 0,7$  m et  $d = 0,5$  m.
4. Dans quel cas limite la chaînette est-elle très peu courbée ? Quel terme peut-on alors négliger dans l’équation différentielle ? Dans ce cas particulier, déterminer l’expression de  $y(x)$  et vérifier la concordance avec le résultat fourni par le code.

### 15. Tunnel gravitationnel (E. Hassnaoui)

Depuis un point  $M_0$  de la surface de la Terre, de latitude  $\lambda$ , on creuse un puits dans lequel on laisse tomber sans vitesse initiale un point matériel de masse  $m$ . Ce puits imaginaire, illimité en profondeur, traverse potentiellement toute la planète et sa forme a été conçue manière à épouser la trajectoire. Ainsi le projectile ne rencontre-t-il jamais d’obstacle dans son mouvement et sa chute libre se poursuit indéfiniment. On étudie son mouvement dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T$  d’origine  $O$ , d’axes dirigés par  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$ , en rotation à la vitesse angulaire  $\Omega$  par rapport au référentiel géocentrique. On modélise la Terre par un ellipsoïde de demi grand axe  $a$  (rayon équatorial) et de demi petit axe  $b$  (rayon polaire), de masse volumique  $\rho$  uniforme. On pose  $b = a\sqrt{1 - e^2}$  où  $e$  désigne l’excentricité de l’ellipsoïde, le cas particulier  $e = 0$  correspondant à une terre sphérique. Valeurs numériques pour la Terre :  $e = 0,082$ ,  $a = 6378137$  m. On admet que le champ de gravité dans la Terre s’écrit

$$\vec{g} = -\omega_1^2 (x \vec{u}_x + y \vec{u}_y) - \omega_2^2 z \vec{u}_z$$

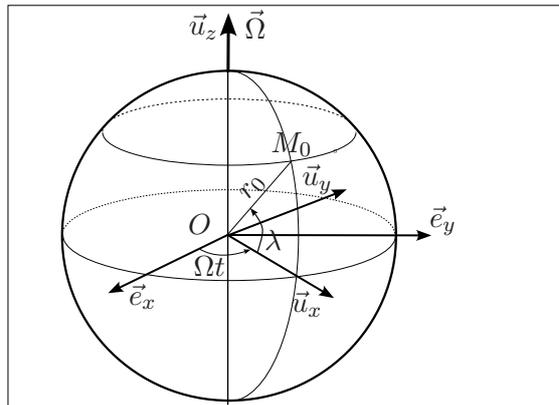
avec

$$\omega_1^2 \simeq \omega^2(1 - e^2/5) \quad \omega_2^2 \simeq \omega^2(1 + 2e^2/5) \quad \omega^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho \quad .$$

On note

$$r_0 = a \frac{\sqrt{1 - e^2}}{\sqrt{1 - e^2 \cos^2 \lambda}} = OM_0$$

la distance initiale de  $M_0$  au centre de la Terre et  $\lambda$  sa latitude. Ses coordonnées sont  $x_0 = r_0 \cos \lambda$ ,  $y_0 = 0$  et  $z_0 = r_0 \sin \lambda$ .



1. En tenant compte du caractère non galiléen du référentiel terrestre, écrire les équation du mouvement.
2. Résoudre ces équations et exprimer  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$  en fonction de  $r_0$ ,  $\lambda$ ,  $\Omega$ ,  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  et  $t$ . Il sera commode de poser  $u = x + iy$ .

3. Dans cette question et la suivante, on reprend l'étude dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_G (0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{u}_z)$ . Les vecteurs  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  pointent vers des étoiles lointaines et se confondent avec  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  à  $t = 0$ . Quelle est la vitesse initiale du projectile dans  $\mathcal{R}_G$  ?
4. Étudier le mouvement du projectile dans  $\mathcal{R}_G$ . Les coordonnées seront notées  $x_G(t)$ ,  $y_G(t)$ ,  $z(t)$ .
5. Projeter  $\vec{e}_x$  et  $\vec{e}_y$  sur  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  puis retrouver par ce changement de base les expressions de  $x(t)$  et  $y(t)$  établies dans la question 2.
6. Déterminer dans  $\mathcal{R}_T$  l'équation de la ligne de champ (tenant à la fois compte de la gravité et de l'inertie d'entraînement) passant par  $M_0$ . On utilisera la relation admise

$$\frac{\omega_1^2 - \Omega^2}{\omega_2^2} = 1$$

qui assure que ce champ est perpendiculaire à la surface de la Terre<sup>1</sup>.

7. Utiliser le code `tunnel_gravitationnel_avec_Coriolis` pour tracer la trajectoire et la ligne de champ. Commenter.

## Thermodynamique et diffusion

### 16. Thermalisation de deux solides en contact par une barre (P.-E.Huguin)

Une barre de longueur  $l$ , de section  $S$ , de capacité calorifique massique  $c$ , de masse volumique  $\rho$  et de conductivité thermique  $\lambda$  a ses extrémités en contact avec deux solide  $S_1$  et  $S_2$  (figure 9). Sa face latérale cylindrique est calorifugée.

- a. En supposant que  $S_1$  et  $S_2$  sont deux thermostats de températures  $T_1$  et  $T_2$ , donner la répartition de température dans la barre en régime stationnaire.
- b. Les solides  $S_1$  et  $S_2$  ont maintenant des capacités calorifiques finies  $C_1$  et  $C_2$ . À l'instant initial, leurs températures sont  $T_{10}$  et  $T_{20}$ . En supposant le phénomène quasi stationnaire, déterminer l'évolution des températures de  $S_1$  et  $S_2$ .
- c. À quelle condition l'hypothèse de quasi-stationnarité est-elle légitime ?

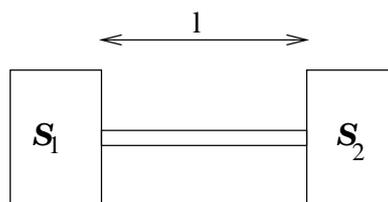
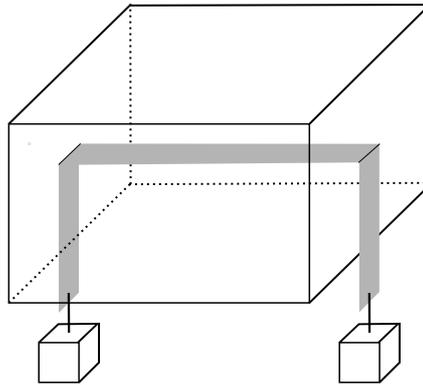


FIGURE 9 – Deux solides en contact thermique par une barre

### 17. Expérience du regel (M. Jacquemin)

Pour illustrer les propriétés originales de la glace, on réalise parfois une manipulation appelée « expérience du regel ». Un mince ruban d'acier horizontal est inclus dans un bloc de glace parallélépipédique de température initiale  $T_0 = 273,15$  K. Il dépasse des deux côté du bloc et on suspend à ces portions horizontales deux poids de même masse  $m_0$ . On constate alors que le ruban s'enfonce lentement dans la glace, qui fond juste en dessous du métal et se reforme juste au dessus. Au bout d'un temps assez long, le ruban a traversé le bloc de glace qui apparaît néanmoins intact, et non pas coupé en deux !

1. cf l'exercice sur la forme hydrostatique de la Terre et l'ellipsoïde de Mac Laurin



1. Rappeler l'allure du diagramme d'état de l'eau dans le plan  $(T, P)$ . En quoi est-il atypique ? Calculer la pente  $\beta$  de la frontière liquide-solide.
2. Expliquer qualitativement l'expérience du regel.
3. Pour faciliter l'étude du phénomène, on s'appuie sur les hypothèses suivantes, que l'on complétera au besoin par d'autres jugées pertinentes :
  - l'air autour du bloc est à la température de  $0^\circ\text{C}$  ;
  - juste au dessus et juste au dessous du ruban, où ont lieu les changements d'état de l'eau, sont réalisés localement des équilibres liquide-solide ;
  - le transfert de l'eau liquide de la région située sous le ruban à celle située au dessus se fait quasi instantanément.

Exprimer dans ce cadre la vitesse  $v$  à laquelle le ruban s'enfonce, en fonction de son épaisseur  $e$ , de sa longueur  $L$  et de sa largeur  $a$ , et de diverses autres grandeurs parmi celles figurant au bas de l'énoncé.

4. Calculer numériquement  $v$  pour  $m_0 = 1\text{ kg}$ ,  $e = 1\text{ mm}$ ,  $L = 0,2\text{ m}$ ,  $a = 1\text{ mm}$ .

Données numériques

point triple de l'eau ( $T_T = 273,16\text{ K}$ ,  $P_T = 610,6\text{ Pa}$ ), température de fusion de l'eau à pression atmosphérique  $T_f = 0^\circ\text{C} = 273,15\text{ K}$ , enthalpie de fusion de la glace  $\ell_f = 333,5 \cdot 10^3\text{ J.kg}^{-1}$ , masse volumique de la glace  $\rho_g = 917\text{ kg.m}^{-3}$ , accélération de la pesanteur  $g = 9,81\text{ m.s}^{-2}$ , conductivité thermique de l'acier  $\lambda = 45\text{ W.m}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ , masse volumique de l'acier  $\rho_a = 7,8 \cdot 10^3\text{ kg.m}^{-3}$ .

### 18. Les trois petits cochons (conte inuit transmis par le concours Centrale-Supélec) (C. Khelil)

Au cours d'une expédition polaire, les trois petits cochons décident de construire un igloo de glace (conductivité thermique  $\lambda = 2,0\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ) de forme hémisphérique. Ils s'accordent sur un rayon intérieur  $R_1 = 1,0\text{ m}$  et une épaisseur de glace de  $30\text{ cm}$ . L'air extérieur est à la température  $T_e = -5^\circ\text{C}$  supposée constante. Au moment où l'igloo est achevé, le grand méchant loup surgit. Les trois petits cochons se précipitent à l'intérieur de l'igloo et obstruent l'entrée par un dernier morceau de glace. Le loup se met à souffler, souffler, mais l'igloo reste en place. Ayant remarqué l'absence de cheminée, le loup estime que sa seule chance est de continuer à souffler. Un régime stationnaire de transferts thermiques finit par s'établir entre l'intérieur et l'extérieur de l'igloo.

1. On note respectivement  $T_1$  et  $T_2$  les températures sur les faces interne et externe de l'igloo. Exprimer le champ de température dans la glace et déterminer la résistance thermique de l'igloo.
2. Le champ de température n'est pas continu aux interfaces entre l'air et la glace. Des transferts thermiques de nature conducto-convective s'y produisent. On les suppose régis par la loi de Newton selon laquelle le flux thermique surfacique est proportionnel au saut de température. Pour l'interface entre l'air intérieur et la paroi intérieure, on a exemple  $j = h_i(T_{int} - T_1)$  (avec  $h_i = 5,0\text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ). Pour l'autre interface,  $j = h_e(T_2 - T_{ext})$  (avec  $h_e = 100\text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  quand le loup souffle et  $h_e = 10\text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  quand il ne souffle pas). Dans une première phase, le loup souffle. Sachant qu'un petit cochon libère une puissance de  $80\text{ W}$ , calculer la température qui règne à l'intérieur de l'igloo ainsi que la température de sa paroi intérieure.
3. Le loup, fatigué, cesse de souffler mais les trois petits cochons restent enfermés. En considérant encore un régime stationnaire, montrer que l'igloo fond. De quel côté ? Sur quelle épaisseur ?

### 19. Diffusion dans un tuyau poreux (K. Kraifi)

Un tube cylindrique de rayon  $a$  et d'axe  $(Oz)$  est le siège d'un phénomène de diffusion moléculaire entre ses deux extrémités, d'abscisses  $z = 0$  et  $x = L$ , sur lesquelles on maintient des densités particulières  $n_0$  et  $n_1$  respectivement. Ce tube est légèrement poreux : au travers de sa paroi d'épaisseur  $e \ll a$ , les particules peuvent diffuser vers l'extérieur. On note respectivement  $D$  et  $D'$  les coefficients de diffusion dans le tuyau et au travers de sa paroi. On se place en régime permanent. En toute rigueur, la densité particulière  $n$  dépend de deux coordonnées cylindriques  $z$  et  $r$ . Cependant, on néglige la dépendance en  $r$  dans le tuyau (c'est à dire pour  $r < a$ ) et on pose  $n = n(z)$ . Dans la paroi au contraire, il existe un fort gradient radial et on peut négliger la diffusion longitudinale.

1. On considère une section de tube comprise entre les cotes  $z$  et  $z + dz$ . Exprimer en fonction de  $D'$ ,  $n(z)$ ,  $a$  et  $e$  le flux infinitésimal  $d\Phi_{\text{lat}}$  de particules qui « fuit » au travers de la paroi.
2. Établir l'équation différentielle dont  $n(z)$  est solution dans le tube.
3. Résoudre l'équation précédente en posant  $\alpha = \sqrt{(2D')/(Da e)}$ , puis vérifier que  $n$  s'exprime par

$$n(z) = \frac{n_0 \sinh(\alpha(L - x)) + n_1 \sinh(\alpha x)}{\sinh \alpha L} .$$

4. Simplifier l'expression de  $n$  dans le cas  $\alpha L \gg 1$ .
5. On revient au cas général. Exprimer le flux  $\Phi_p$  de particules s'échappant au travers de la paroi.
6. Examiner le cas où  $\alpha L \ll 1$  en simplifiant les expressions de  $n$  et  $\Phi_p$ .

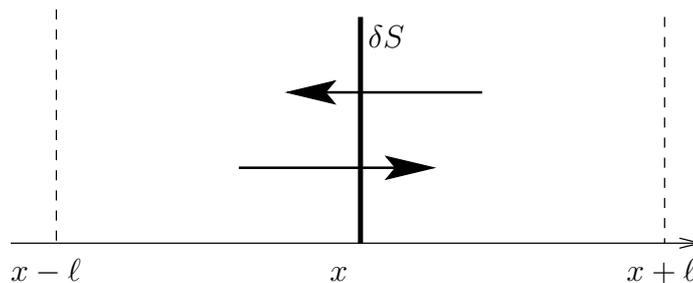
### 20. Estimation des coefficients de transport dans un gaz (G. Launay, L. Magron-Mathis)

On s'intéresse ici à une description microscopique simpliste des phénomènes de transports diffusifs dans un gaz. On considère pour cela la matière à l'échelle moléculaire. Dans un gaz parfait, chaque molécule se déplace librement, sans interaction, jusqu'à ce qu'elle subisse un choc instantané avec une autre molécule. On note  $\ell$  le libre parcours moyen, c'est à dire la distance moyenne que parcourt une molécule entre deux chocs successifs et  $\tau$  la durée de ce vol. On admet que  $\ell$  s'exprime par

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}n\sigma}$$

où  $n$  est la densité particulière du gaz et  $\sigma$  la section efficace de collision des molécules. Les vitesses  $\vec{v}$  des molécules sont évidemment très diverses et changeantes. Pour simplifier, on admet que les particules ne peuvent se déplacer que parallèlement à chacun des trois axes de coordonnées, dans un sens ou dans l'autre, et que la norme de vitesse présente une valeur unique  $u$ .

1. Considérons tout d'abord un gaz chimiquement pur dans lequel certaines molécules sont « marquées ». On note  $n(x, t)$  leur densité particulière. On étudie leur flux à travers une surface  $\delta S$  à l'abscisse  $x$ . On suppose pour simplifier que les molécules traversant  $\delta S$  de gauche à droite pendant la durée  $\tau$  proviennent « en moyenne » de l'abscisse  $x - \ell/2$  où la densité particulière vaut  $n(x - \ell/2)$ .



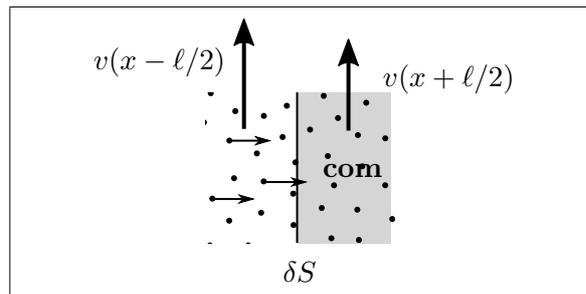
- (a) Parmi les particules situées à gauche de  $\delta S$ , quelle fraction se dirige vers  $\delta S$ ? Combien la traversent pendant la durée  $\tau$ ? On notera  $N_{\rightarrow}$  ce nombre. Faire le même raisonnement pour les particules traversant  $\delta S$  de droite à gauche en notant  $N_{\leftarrow}$  leur nombre. Quel est le flux net  $\Phi$  de particules à travers  $\delta S$ , compté positivement vers les  $x$  croissants ?

- (b) On admet que  $n$  varie peu sur la distance  $\ell$ . Montrer que le raisonnement précédent permet d'exprimer en fonction de  $\ell$  et  $u$ , le coefficient de diffusion  $D$  des molécules marquées tel que le définit la loi de Fick.
- (c) Sachant que la vitesse moyenne  $u$  est proportionnelle à la vitesse quadratique moyenne et en n'oubliant pas que  $\ell$  n'est pas une constante, prédire l'évolution de  $D$  avec la température  $T$  et la pression  $P$ . Pour comparaison, on obtient expérimentalement une loi du type  $D \propto T^{1,8}P^{-1}$ .

**2.** Passons à l'estimation de la conductance thermique du gaz. Il n'est désormais plus question de molécules marquées et on note simplement  $n = n_0$  la densité particulaire, supposée uniforme. Le nombre de particules traversant la surface dans un sens ou dans l'autre est donc le même. Par contre, la température du gaz  $T(x)$  est supposée non uniforme de sorte que les deux groupes présentent des températures distinctes, comme c'était le cas pour la densité particulaire dans la question 1. À titre d'exemple, supposons que la gauche soit plus chaude que la droite. Les particules allant de gauche à droite possèdent une vitesse d'agitation thermique plus grande que celles allant dans l'autre sens de sorte qu'en traversant la frontière, elles vont enrichir la partie droite en énergie. Les particules voyageant en sens inverse ne compensent pas complètement cet effet puisqu'elles sont moins agitées et transportent donc moins d'énergie.

- (a) On note  $C_{vm}$  la capacité calorifique molaire et  $N_A$  le nombre d'Avogadro. Quelle énergie interne  $\delta U_{\rightarrow}$  ou  $\delta U_{\leftarrow}$  les particules traversant  $\delta S$  dans un sens ou dans l'autre transportent-elles pendant la durée  $\tau$ ? Quel est le gain net en énergie de la partie droite?
- (b) Selon le premier principe, ce transport d'énergie s'interprète comme par flux de chaleur<sup>2</sup>. En déduire l'expression, en fonction  $C_v$ ,  $N_a$ ,  $n$ ,  $u$  et  $\ell$ , de la conductivité thermique  $\lambda$  du gaz, définie par la loi de Fourier.
- (c) Quel comportement prévoit-on pour  $\lambda$  en fonction de  $T$  et  $P$ ? Expérimentalement, on obtient une loi du type  $\lambda \propto P^0 T^{0,7}$ .

**3.** Enfin, intéressons-nous à la diffusion de quantité de mouvement dans un gaz, i.e. à sa viscosité. On considère un écoulement dans lequel le champ de vitesse est du type  $\vec{v} = v(x)\vec{u}_y$ . Les molécules situées à gauche et à droite de  $\delta S$  n'ont donc pas la même vitesse macroscopique (cette vitesse  $v$  s'ajoute à la vitesse d'agitation thermique  $u$ ). À titre d'exemple, supposons que la gauche soit plus rapide que la droite. Les particules allant de gauche à droite possèdent une quantité de mouvement (selon  $y$ ) plus grande que celles allant dans l'autre sens de sorte qu'en traversant la frontière puis en se mêlant à la partie droite, elles tendront à l'accélérer en lui communiquant leur mouvement. Les particules voyageant en sens inverse ne compensent pas complètement cet effet puisqu'elles sont moins rapides.



- (a) On note  $m$  la masse des molécules. Quelle quantité de mouvement  $\delta P_{y\rightarrow}$  transportent les particules traversant  $\delta S$  de gauche à droite pendant la durée  $\tau$ ? Quelle quantité de mouvement  $\delta P_{y\leftarrow}$  transportent les particules traversant  $\delta S$  de droite à gauche pendant la durée  $\tau$ ? Quel est le gain net de quantité de mouvement  $\delta P_y$  de la région droite?
- (b) Nous allons interpréter  $\delta P_y/\tau$  comme une force. Pour justifier cette affirmation, on procède entre les instants  $t$  et  $t + \tau$  à un bilan de quantité de mouvement analogue à celui qui permet d'étudier la propulsion par réaction. On considère le système fermé  $\Sigma$  constitué du fluide à droite de  $\delta S$  (partie « com »), auquel on adjoint les particules qui y entrent (ou qui en sortent) pendant la durée  $\tau$ . Les premières sont englobées dans la zone commune à  $t + \tau$  et les premières en font déjà partie à  $t$ .  
Exprimer  $\frac{dP_{y\Sigma}}{dt}$  en fonction de  $\frac{dP_{y\text{com}}}{dt}$  et de  $\frac{\delta P_y}{\tau}$ . En appliquant le principe fondamental de la dynamique, introduire une « force fictive » s'exerçant sur la partie droite.
- (c) Cette force s'interprète comme celle de viscosité. En déduire, en fonction de  $n$ ,  $m$ ,  $u$  et  $\ell$ , l'expression de la viscosité  $\eta$  telle que la définit la loi de Newton.

2. Nous passons sous silence les subtilités liées au fait que l'on a ici un système ouvert.

(d) Quelle comportement prévoit-on pour  $\eta$  en fonction de  $T$  et  $P$  ?

## 21. Un modèle d'effet de serre terrestre (V. Moniot)

On étudie ici un modèle permettant d'estimer la température à la surface de la Terre, supposée constante et uniforme. On s'appuie sur les hypothèses suivantes :

- L'atmosphère est modélisée par une couche homogène de température  $T_a$  non réfléchissante, présentant un coefficient d'absorption  $\alpha_a$  dans le visible et  $\bar{\alpha}_a$  dans l'infrarouge ;
- Le sol est modélisé par une surface opaque de température  $T$ , de coefficient d'absorption  $\alpha$  dans le visible et égal à 1 dans l'infrarouge ; il réfléchit le rayonnement qu'il n'absorbe pas ;
- la diffusion du rayonnement solaire par l'atmosphère (nuages, aérosols, gaz, etc.) est traitée de la façon simplifiée suivante : une fraction  $r$  du rayonnement solaire  $\varphi_s$  incident est réfléchi vers l'espace avant de pénétrer dans l'atmosphère.

L'atmosphère et le sol sont traités comme des corps gris : par à rapport à un corps noir, leur émittance est multipliée par un coefficient d'émissivité  $e$ , égal à l'absorbance  $\alpha$  du corps pour les mêmes longueurs d'ondes.

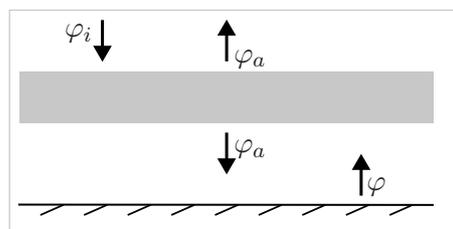
1. Le rayonnement solaire parvenant à la Terre présente une puissance surfacique de  $1368 \text{ W.m}^{-2}$  dans un plan perpendiculaire aux rayons lumineux. Dans toute la suite, on considère le flux solaire surfacique moyen  $\varphi_s$  atteignant un point quelconque de la surface terrestre et on lui attribue la valeur de  $342 \text{ W.m}^{-2}$ . Pouvez-vous justifier cette valeur ?

2. Quel est le flux surface  $\varphi_i$  pénétrant au sommet de l'atmosphère ?

3. On suppose que ce rayonnement incident est uniquement constitué de lumière visible, alors que ceux émis par l'atmosphère et par le sol sont dans l'infrarouge. Cela vous paraît-il raisonnable ? À quelle propriété fondamentale du rayonnement thermique ces approximations sont-elles liées ?

4. En fonction des grandeurs introduites plus haut, exprimer les coefficients de transmission  $\tau_a$  et  $\bar{\tau}_a$  de l'atmosphère dans le visible et dans l'infrarouge, et le coefficient de réflexion  $r_s$  du sol dans le visible.

5. La figure ci-dessous représente le flux incident, le flux  $\varphi_a$  émis par l'atmosphère (vers le haut et vers le bas) et le flux  $\varphi$  émis par le sol. La compléter en y faisant apparaître quatre flux transmis ou réfléchis et indiquer l'expression de chacun.



6. Écrire deux relations traduisant l'équilibre thermique de ce système.

7. Le modèle conduit aux expressions suivantes :

$$T = \left( \varphi_i \frac{2\alpha(1 - \alpha_a) + \alpha_a [1 + (1 - \alpha)(1 - \alpha_a)]}{(2 - \bar{\alpha})\sigma} \right)^{1/4}$$

$$T_a = \left( \varphi_i \frac{\alpha(1 - \alpha_a)\bar{\alpha}_a + \alpha_a [1 + (1 - \alpha)(1 - \alpha_a)]}{\bar{\alpha}_a(2 - \bar{\alpha}_a)\sigma} \right)^{1/4} .$$

Sans faire le calcul, expliquer comment on obtient ces expressions.

8. À partir de la figure (10), déterminer  $r$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_a$ ,  $\bar{\alpha}_a$ .

9. Calculer la température de la Terre et celle de l'atmosphère. Commenter.

Données : constante de Stefan  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$ , constante de Wien  $W = 2898 \mu\text{m.K}$ .

## 22. Échanges entre trois sources (Centrale) (A. Pierlot)

1. Donner les schéma fonctionnel d'une pompe à chaleur et indiquer le sens réel des échanges. Déterminer l'efficacité énergétique maximale et proposer une application numérique dans un cadre concret.

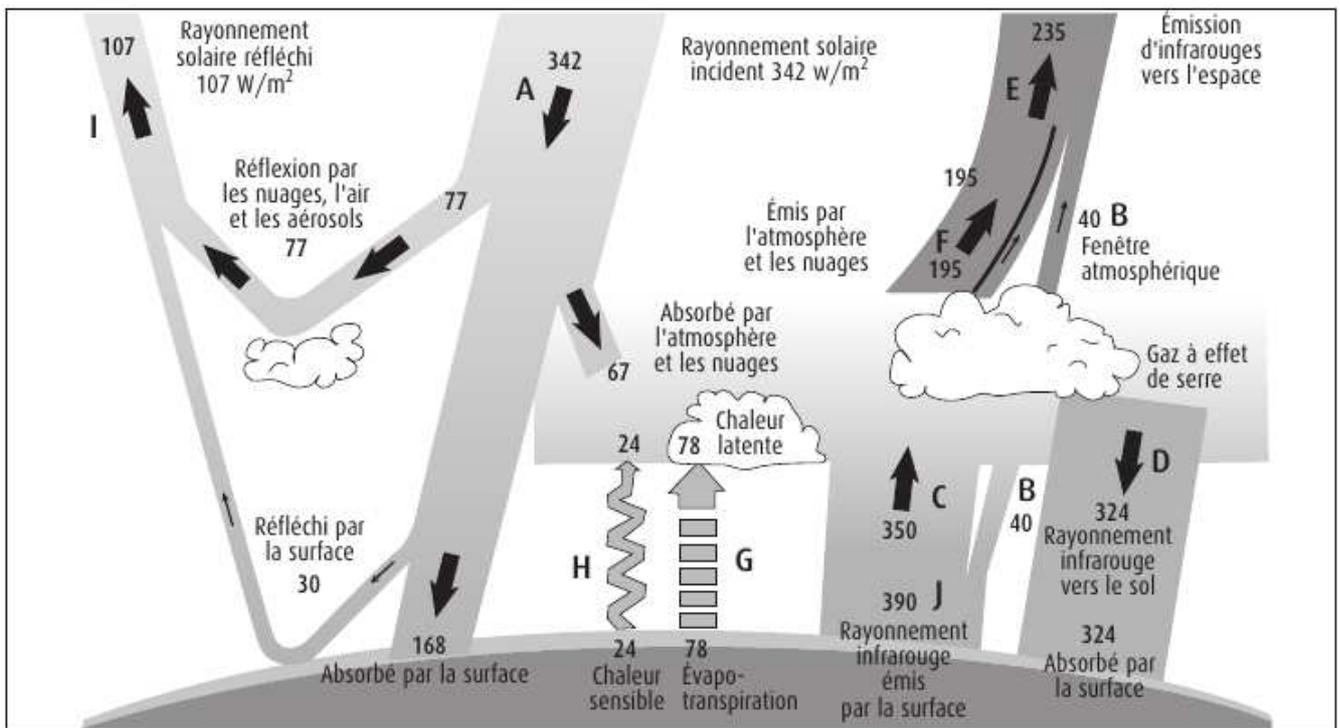


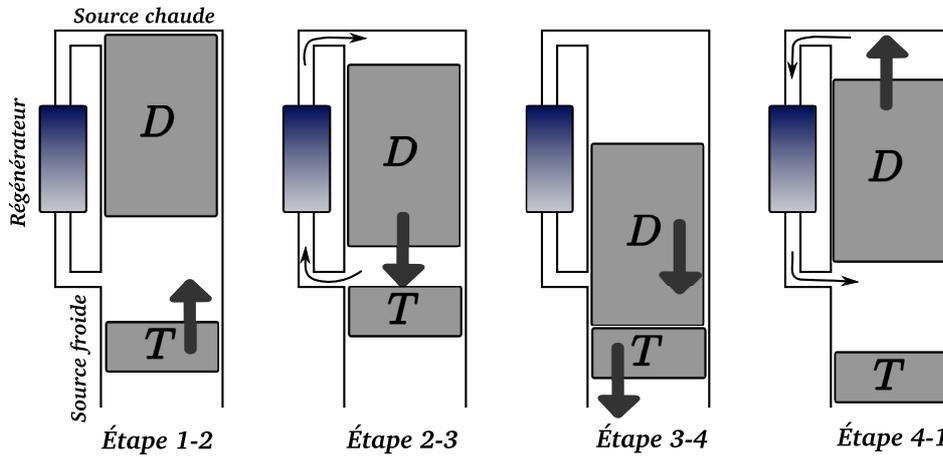
FIGURE 10 – Échanges énergétiques de la Terre en  $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$ . A : rayonnement solaire au dessus de l'atmosphère ; C : rayonnement infrarouge absorbé par l'atmosphère ; D : rayonnement émis par l'atmosphère vers la Terre ; F : rayonnement émis par les hautes couches de l'atmosphère vers l'espace.

2. Même question pour un moteur thermique, sans l'application numérique.
3. On dispose de trois solides de même capacité calorifique  $C$  aux températures  $T_{10} = 300\text{ K}$ ,  $T_{20} = 100\text{ K}$  et  $T_{30} = 300\text{ K}$ . Expliquer comment on peut, sans apport extérieur d'énergie, échauffer au delà de  $300\text{ K}$  l'un des trois solides. Déterminer la température maximale que l'on peut atteindre.

### 23. Moteur de Stirling (L. Waltisperger)

Le moteur de Stirling est un dispositif ditherme à combustion externe. Au moyen d'un piston déplaceur  $D$  le gaz est périodiquement transvasé de la zone froide à la zone chaude et inversement. Ces transvasements s'effectuent à volume constant au travers d'un échangeur thermique appelé régénérateur. Au cours d'autres phases du cycle, le gaz échange avec un second piston  $T$  le travail utile à une machine. Dans le détail, son fonctionnement se réalise selon les quatre étapes suivantes :

- Initialement froid et détendu (volume  $V_1$ , état 1), le gaz est comprimé de manière quasi-statique par la remontée du piston de travail, tout en restant en équilibre thermique avec la source froide de température  $T_1$ . Il parvient ainsi à l'état 2 de volume  $V_2$ .
- Le piston déplaceur, se translatant vers le bas jusqu'à la rencontre du piston de travail, chasse gaz vers le haut au travers du régénérateur. Le gaz s'y réchauffe jusqu'à la température  $T_3$  de la source chaude sans changer de volume, parvenant ainsi à l'état 3.
- Le gaz chaud se détend de manière quasi-statique en repoussant les deux pistons tout en restant en équilibre thermique avec la source chaude. Il parvient ainsi à l'état 4.
- La remontée du piston déplaceur chasse le gaz vers le bas au travers du régénérateur. Il s'y refroidit jusqu'à la température  $T_1$  sans changer de volume.



On admettra que dans les étapes de transvasement, la pression du gaz est à chaque instant la même de part et d'autre du piston déplaceur. On suppose de plus le gaz parfait. On note  $\rho = \frac{V_1}{V_2}$  le rapport volumérique de compression.

1. Représenter le cycle de fonctionnement dans le plan  $(V, P)$  et dans le plan  $(S, T)$ .
2. On admet ici que le régénérateur fonctionne de manière idéale, c'est à dire qu'il restitue dans l'étape 2-3 toute la chaleur que gaz lui a fournie dans l'étape 4-1. En régime permanent, seule la quantité de chaleur  $Q_{34}$  provient donc de la source chaude. Exprimer le rendement  $\eta$  du moteur et commenter son expression en lien avec les hypothèses.
3. En réalité, le gaz atteint dans le transvasement de bas en haut une température  $T'_2$  légèrement inférieure à  $T_3$ . La fin de l'étape isochore 2-3 se fait par échange direct de chaleur avec la source chaude. On définit l'efficacité du régénérateur par

$$\epsilon = \frac{T'_2 - T_1}{T_3 - T_1}$$

- (a) Placer le point 2' sur les cycles.
- (b) Par rapport à la question précédente, le travail fourni par le gaz au cours d'un cycle et la chaleur puisée dans le source chaude sont-ils modifiés ?
- (c) Montrer que le rendement s'exprime maintenant par

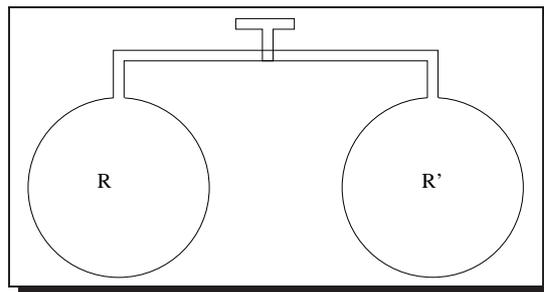
$$\eta = \frac{\eta_0}{1 + \frac{1}{\gamma-1} \frac{(1-\zeta)(1-\epsilon)}{\ln \rho}}$$

où  $\eta_0$  est le rendement obtenu dans le premier modèle. On a noté  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ ,  $\rho = \frac{V_1}{V_2}$  et  $\zeta = \frac{T_1}{T_3}$ . Comment  $\eta$  varie-t-il avec  $\gamma$  et  $\rho$  ?

- (d) Quelle serait l'expression du rendement en l'absence de régénérateur ?
- (e) Le calculer numériquement pour  $T_1 = 313 \text{ K}$ ,  $T_3 = 1023 \text{ K}$ ,  $\epsilon = 0,8$ ,  $\rho = 3$ ,  $\gamma = 1,4$ .

#### 24. Transformation et transferts d'eau entre deux récipients (E. Rieckenberg)

Deux récipients  $R$  et  $R'$  de même volume  $V = 11$  sont thermostatés aux températures respectives  $T = 293 \text{ K}$  et  $T' = 278 \text{ K}$ . Ils sont initialement vides et peuvent communiquer par un tube muni d'un robinet.



La pression de vapeur saturante de l'eau est donnée à chacune des deux températures :

$$P_s(T) = 2,32 \cdot 10^3 \text{ Pa} \quad P_s(T') = 0,88 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

- a. Le robinet étant fermé, on introduit 50 mg d'eau dans  $R$ . Préciser l'état de cette eau.
- b. On ouvre le robinet et on attend que l'équilibre s'établisse. Déterminer les quantités d'eau liquide et d'eau vapeur dans chacun des récipients.

### 25. Échangeur à contre-courant (A. Sall)

Un échangeur thermique est constitué de deux canalisations d'axe ( $Ox$ ), de longueur  $L$  et de même section rectangulaire de côtés  $a$  (selon  $\vec{u}_z$ ) et  $b$  (selon  $\vec{u}_y$ ), séparées par une paroi métallique d'épaisseur  $e \ll L$  (figure 11). Dans la conduite supérieure, un liquide entre en  $x = 0$  à la température  $T_{10}$  et s'écoule vers la droite à la vitesse constante et uniforme  $v$ . Dans la conduite inférieure, le même liquide entre en  $x = L$  à la température  $T_{2L}$  et s'écoule vers la gauche à la même vitesse constante et uniforme. On note  $T_1(x)$  et  $T_2(x)$  les températures dans chacun des deux fluides à l'abscisse  $x$ , supposées uniformes dans chaque section orthogonale à  $\vec{u}_x$ . On se place en régime stationnaire. On note  $c$  la capacité calorifique massique du fluide,  $\lambda$  sa conductivité thermique et  $\lambda_0$  celle du métal. On rappelle que le débit massique s'exprime par  $D_m = \mu v ab$ .

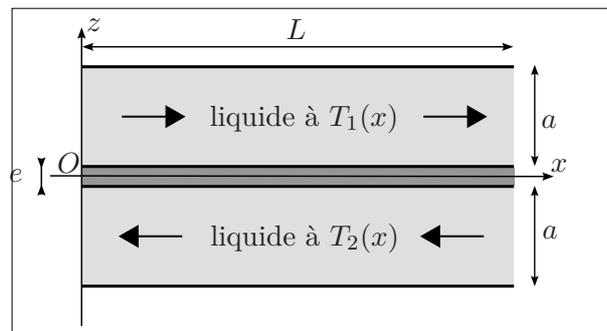


FIGURE 11 – Échangeur à contre-courant

Dans les premières questions, on néglige la conduction thermique dans le fluide, avant d'analyser la pertinence de cette hypothèse à partir de la question 8.

1. Dans le métal, on néglige tout flux thermique dans la direction de  $\vec{u}_x$ . Quelle hypothèse de l'énoncé légitime cette approche ?
2. Exprimer le flux thermique  $d\Phi_{1 \rightarrow 2}$  traversant un élément de la paroi de longueur  $dx$ , du fluide 1 vers le fluide 2.
3. Montrer que  $T_1(x)$  est solution de l'équation différentielle

$$\frac{dT_1}{dx} = \frac{T_2(x) - T_1(x)}{\delta}$$

et donner l'expression de  $\delta$ .

4. Trouver l'équation différentielle dont  $T_2$  est solution.
5. Exprimer  $T_1(x)$  et  $T_2(x)$ .
6. Les résultats précédentes conduisent à

$$T_{1L} = T_1(L) = \frac{\delta T_{10} + LT_{2L}}{\delta + L} \quad T_{20} = T_2(0) = \frac{LT_{10} + \delta T_{20}}{\delta + L} .$$

Commenter l'influence du rapport  $L/\delta$  sur ces températures de sortie.

7. Exprimer le flux thermique échangé par les fluides dans l'ensemble de l'échangeur, en fonction des températures d'entrée ( $T_{10}, T_{2L}$ ) et des paramètres du problème. Comment choisir ces paramètres pour maximiser l'échange ?

Jusqu'ici, la conduction thermique au sein du fluide a été négligée. Les questions qui suivent ont pour but d'analyser la pertinence de ce point de vue.

8. Comment faut-il modifier les équations des questions 3 et 4 pour tenir compte de la conduction thermique dans le fluide ? Montrer que  $T_1$  est solution de

$$\frac{d^2 T_1}{dx^2} - \frac{1}{\delta'} \frac{dT_1}{dx} + \frac{1}{\delta \delta'} (T_2 - T_1) = 0$$

et donner l'expression de  $\delta'$  en fonction de  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $v$  et  $c$ . Trouver aussi l'équation dont  $T_2$  est solution.

9. Dans ces équations, on identifie trois types de termes : ceux liés à la diffusion thermique dans le fluide, ceux liés à la convection et ceux liés à l'échange au travers du métal. On appelle « nombre de Péclet » et on note  $Pe$  le quotient

$$Pe = \frac{\text{ordre de grandeur du terme convectif}}{\text{ordre de grandeur du terme diffusif}} .$$

Pour les ordres de grandeur, on admet que toutes les variations de température ont le même ordre de grandeur  $\tilde{T}$  et se font à l'échelle  $L$ . Exprimer le nombre de Péclet en fonction de  $L$  et d'une autre longueur.

10. On définit maintenant<sup>3</sup>

$$N = \frac{\text{ordre de grandeur du terme d'échange}}{\text{ordre de grandeur du terme diffusif}} .$$

L'exprimer sous la forme  $N = L/\delta''$  en précisant l'expression de  $\delta''$  en fonction de  $\lambda$ ,  $e$ ,  $a$  et  $\lambda_0$ .

11. À quelles conditions est-il légitime de négliger la diffusion dans le fluide ?

12. Montrer que la conception de l'échangeur nécessite un compromis sur le choix de la vitesse.

Ce problème peut donner à lieu à divers prolongements, tels que

- résoudre exactement le cas où  $v = 0$  ;
- résoudre numériquement par la méthode des différences finies le système d'équation de la question 8 ;
- résoudre exactement le système linéaire de la question 8.

## 26. Bilans dans un échangeur à contre-courant (A. Savary)

On considère l'échangeur thermique représenté sur la figure (12). Les états d'entrée et de sortie sont caractérisés par les températures  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$ , avec  $T_3 \neq T_1$ . L'air en écoulement est assimilé à un gaz parfait diatomique de masse molaire  $M = 29 \text{ g.mol}^{-1}$  et s'écoule à pression atmosphérique. L'installation fonctionne en régime stationnaire avec un débit massique  $D_m$  identique dans les deux canalisations. Des échanges thermiques sont susceptibles de se produire entre les deux écoulements (c'est le but du dispositif), par contre l'échangeur dans son ensemble est parfaitement calorifugé.

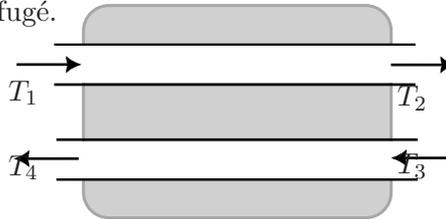


FIGURE 12 – Échangeur à contre-courant

1. Dans cette question et la suivante, on suppose le fonctionnement réversible. En utilisant deux bilans thermodynamiques, établir deux relations entre les températures  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_3$  et  $T_4$ .
2. On suppose  $T_1$  et  $T_3$  connues avec  $T_1 > T_3$ . Trouver l'ensemble des solutions pour  $T_2$  et  $T_4$ .
3. Pour chacune des solutions obtenues, expliquer par des phrases claires pourquoi elles sont effectivement compatibles avec l'hypothèse de réversibilité. Dans le cas où  $T_2 \neq T_1$ , on tracera le graphe donnant les variations de température en fonction de  $x$ , abscisse comptée de gauche à droite dans chacune des canalisations, en admettant que ce profil est linéaire.
4. Une étude détaillée de l'échangeur dans le cas général (pas nécessairement réversible) montre que

$$T_1 - T_4 = T_2 - T_3 = \frac{T_1 - T_3}{1 + \frac{gL}{D_m c_p}}$$

où  $g$  est la conductance linéique de l'espace séparant les deux flux et  $L$  la longueur des canalisations. Dans quel cas limite la réversibilité est-elle atteinte ?

5. Dans un échangeur réel, on a mesuré  $T_1 = 350 \text{ K}$ ,  $T_2 = 290 \text{ K}$ ,  $T_3 = 280 \text{ K}$  et  $T_4 = 340 \text{ K}$ . Calculer l'entropie massique créée.

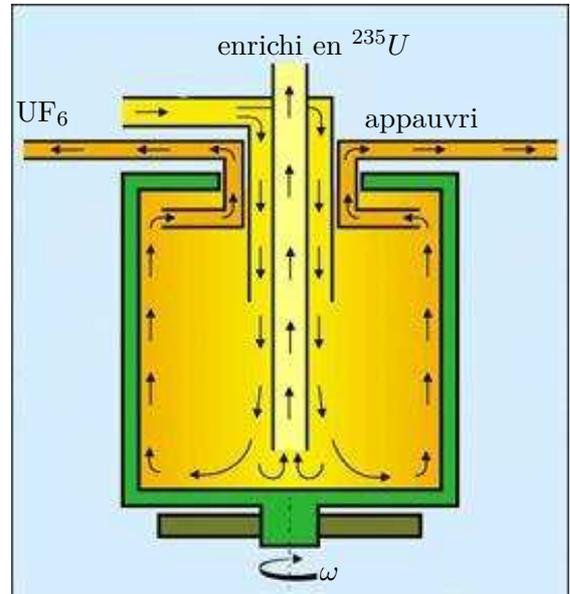
3. Je ne connais pas le nom de ce nombre

6. Suite à un incident, l'échangeur n'est plus parfaitement calorifugé et il cède de la chaleur au milieu ambiant, considéré comme un thermostat de température  $T_0 = 293\text{ K}$ . On mesure alors  $T_4 = 330\text{ K}$ , les autres températures étant inchangées. Calculer les pertes thermiques massiques.

## Mécanique des fluides

### 27. Séparation d'isotopes par centrifugation (A. Sidqui)

L'uranium naturel se présente comme un mélange des deux isotopes  $^{238}\text{U}$  et  $^{235}\text{U}$  avec des fractions massiques de 0,993 et 0,007. Seul l'uranium 235 est fissile et il est nécessaire d'en augmenter la proportion, jusqu'à quelques pourcent pour les applications civiles et quelques dizaines de pourcent pour les armes nucléaires. La méthode d'enrichissement la plus utilisée aujourd'hui est la centrifugation. Des vapeurs d'hexafluorure d'uranium  $\text{UF}_6$  sont introduites dans un cylindre en rotation autour de son axe de symétrie. Les molécules les plus lourdes s'accablent près des parois et les molécules les plus légères près de l'axe. De plus, le gaz circule dans la centrifugeuse, permettant l'aspiration de la partie enrichie en  $^{235}\text{U}$  au bas du cylindre et de celle appauvrie en haut. Comme l'enrichissement obtenu ainsi est très faible, il est nécessaire d'utiliser les milliers de centrifugeuses en cascade afin d'atteindre les pourcentages souhaités.



Pour estimer l'efficacité du procédé, on adopte un modèle très simplifié en supposant que le gaz se trouve en équilibre dans le référentiel de la centrifugeuse, en rotation uniforme de vitesse angulaire  $\omega$  par rapport au référentiel du laboratoire.

1. Pour l'instant on suppose qu'un unique gaz parfait de masse molaire  $M$  se trouve dans la centrifugeuse. Déterminer le champ de pression  $p(r)$  et la densité particulaire  $n(r)$ ,  $r$  désignant le coordonnée cylindrique usuelle. On notera  $p_0$  et  $n_0$  leurs valeurs sur l'axe, et  $T$  la température, supposée uniforme.
2. On admet que l'expression obtenue pour  $n(r)$  s'applique séparément à  $^{238}\text{UF}_6$  (densité particulaire  $n_1$ ) et  $^{235}\text{UF}_6$  (densité particulaire  $n_2$ ), avec bien sûr des valeurs de  $n_0$  distinctes. Exprimer le rapport d'enrichissement

$$q = \frac{n_2(0)/n_1(0)}{n_2(r)/n_1(r)}$$

en fonction de  $R$ ,  $T$ ,  $r$ ,  $\omega$  et des masses molaires  $M_1$  et  $M_2$ .

3. Application numérique :  $r = 15\text{ cm}$ ,  $\omega = 50000\text{ tour/min}$ ,  $R = 8,314$ ,  $T = 300\text{ K}$ ,  $M_1 - M_2 = 3,0\text{ g.mol}^{-1}$ . Calculer  $q$ . En admettant que  $q$  s'identifie au rapport des compositions isotopiques de deux centrifugeuses successives, combien d'étapes faudrait-il pour atteindre un taux d'uranium 235 de 20% ? Expliquer pourquoi plusieurs milliers de centrifugeuses en cascade sont en réalité nécessaires.

### 28. Forme hydrostatique de la Terre : ellipsoïde de Mac Laurin (S. Taillandier)

La rotation de la Terre autour de l'axe des pôles, à la vitesse angulaire  $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5}\text{ rad.s}^{-1}$ , entraîne une légère déformation du globe terrestre. On le modélise par un fluide de masse volumique uniforme  $\rho = 5,51 \cdot 10^3\text{ kg.m}^{-3}$  dont la surface se confond avec un ellipsoïde de révolution de demi grand axe  $a$  et de demi petit axe  $b$  correspondant au rayon équatorial et au rayon polaire. En coordonnées cylindriques d'axe confondu avec celui des pôles, la surface terrestre est définie par la relation

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

avec  $b = a\sqrt{1 - e^2}$ . Le nombre sans dimension  $e$  se nomme excentricité de l'ellipsoïde. Pour  $e \ll 1$ , on admet que le champ de gravité à l'intérieur de l'astre s'écrit

$$\vec{g} = -\omega_1^2 r \vec{u}_r - \omega_2^2 z \vec{u}_z$$

avec

$$\omega_1^2 = \omega^2(1 - e^2/5) \quad \omega_2^2 = \omega^2(1 + 2e^2/5) \quad \omega^2 = \frac{4}{3}\pi G\rho \quad .$$

1. Exprimer à une constante près le champ de pression dans la Terre.
2. On note  $P_0$  la pression atmosphérique, presque uniforme à la surface de la Terre. Montrer que

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{\omega_1^2 - \Omega^2}{\omega_2^2}$$

puis trouver l'expression de  $e$  en fonction de  $\Omega$ ,  $G$  et  $\rho$ .

3. On donne  $G = 6,67.10^{-11} \text{ m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$ . Calculer numériquement  $e$  et comparer à la valeur mesurée  $e = 0,082$ . Commenter.
4. On considère un point de latitude géocentrique  $\lambda$  situé à la distance  $r_0$  du centre de la Terre, et coordonnées ( $r = r_0 \cos \lambda, z = r_0 \sin \lambda$ ). Le champ de pesanteur en ce point définit la vertical locale et on appelle latitude géodésique l'angle  $\theta$  que ce vecteur forme avec le plan équatorial. Montrer que

$$\tan \theta = \frac{\tan \lambda}{1 - e^2}$$

et calculer numériquement  $\theta$  pour  $\lambda = 45^\circ$ .

5. Exprimer la différence entre le champ de pesanteur au pôle et le champ de pesanteur à l'équateur, en fonction de  $a$ ,  $\Omega$ ,  $e$ ,  $G$  et  $\rho$ . On donne  $a = 6378 \text{ km}$ . Calculer numériquement cette différence et la comparer à la valeur mesurée de  $0,052 \text{ m.s}^{-2}$ .

## 29. Statique et dynamique des ferrofluides (G. Tritz-Guden)

Les ferrofluides sont des liquides capables de s'aimanter lorsqu'on les plonge dans un champ magnétique. Chaque élément infinitésimal de volume  $d\tau$  se transforme alors en un dipôle magnétique de moment dipolaire  $d\vec{m} = \vec{M} d\tau$ , ce qui perturbe ou modifie profondément le champ magnétique appliqué. Plutôt que de raisonner sur  $\vec{B}$ , on raisonne alors sur un autre champ noté  $\vec{H}$  qui lui est lié. L'aimantation  $\vec{M}$  est d'autant plus forte que  $\vec{H}$  l'est et il existe une relation du type  $M = M(H)$  caractérisant le comportement magnétique du matériau.

Des forces magnétiques s'exercent au sein du ferrofluide. Leur calcul, tout comme celui de  $\vec{H}$  et de  $\vec{B}$ , est en général assez complexe<sup>4</sup>. Les phénomènes que nous allons étudier peuvent cependant s'interpréter en admettant les propriétés suivantes, fausses dans le cas général :

- Le champ  $\vec{H}$  est donné par  $\vec{H} = \frac{\vec{B}_0}{\mu_0}$  où  $\vec{B}_0$  désigne le champ magnétique qu'on mesurerait en l'absence de ferrofluide.
- La force magnétique volumique dans le ferrofluide est donnée par  $\vec{f}_m = \mu_0 M \vec{\nabla} H$  (force de Kelvin).
- La pression est continue à l'interface air-ferrofluide.

Il sera commode de faire apparaître dans les calculs la quantité suivante, caractérisant les propriétés du ferrofluide considéré :

$$u = \mu_0 \int_0^H M(H') dH' \quad . \quad (1)$$

Cette grandeur  $u$  dépend de  $H$  qui lui même peut dépendre du point de l'espace considéré. On remarque utilement que

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu_0 M(H) \frac{\partial H}{\partial x} \quad .$$

1. Quelle est la dimension de  $u$  ? Donner une expression de  $\vec{f}_m$  faisant intervenir cette grandeur.
2. Lorsque le champ est suffisamment faible, le comportement magnétique du fluide est linéaire, c'est à dire  $M$  est proportionnel à  $H$  :  $M = \chi H$  avec  $\chi$  constant. Donner l'expression de  $u(H)$  dans ce cas.
3. Un fil conducteur infini, rectiligne et vertical traverse un récipient rempli d'un ferrofluide de masse volumique  $\rho$  (partie gauche de la figure 13). Lorsqu'on établit un courant d'intensité  $I$ , le ferrofluide est attiré par le fil. Au loin, le champ est très faible et le fluide atteint l'altitude  $z_0$ . Déterminer la forme que prend sa surface à l'équilibre en utilisant la fonction  $u(H)$ . Dans le cas d'un matériau linéaire, exprimer l'altitude  $z$  d'un point de la surface en fonction de  $r$ ,  $z_0$ ,  $\rho$ ,  $g$ ,  $\chi$  et  $I$ .

4. cf le livre *Ferrohydrodynamics* de R.E. Rosensweig

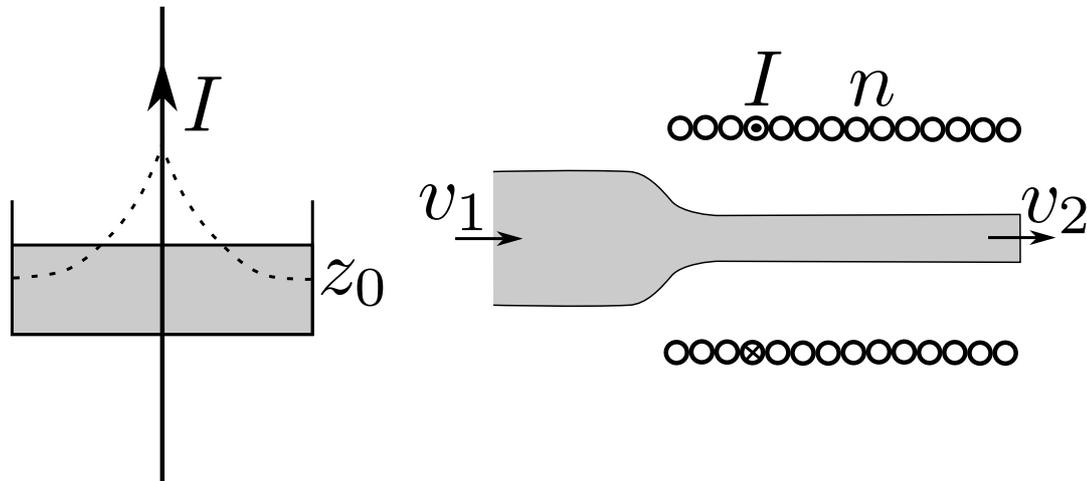


FIGURE 13 – Partie gauche : ascension d'un ferrofluide autour d'un fil. Partie droite : jet de ferrofluide pénétrant dans un solénoïde

4. Considérons maintenant une situation où le fluide est en écoulement. On néglige tout phénomène de viscosité. Démontrer qu'il vérifie une relation de Bernoulli portant sur la quantité  $p + \rho gz + \frac{1}{2}\rho v^2 - u$ .
5. Un jet horizontal de ferrofluide de vitesse  $v_1$  et de section  $S_1$  pénètre dans un solénoïde présentant  $n$  spires par unité de longueur (partie droite de la figure 13). Le liquide, attiré par la région de champ plus intense, voit sa vitesse augmenter. Déterminer sa nouvelle section  $S_2$  en fonction de  $S_1$ ,  $\mu_0$ ,  $v_1$ ,  $\rho$  et  $u(H)$  (dans le solénoïde). On négligera l'effet de la pesanteur et on admettra que le champ est nul hors du solénoïde. Dans le cas d'un matériau linéaire, exprimer  $S_2$  en fonction de  $I$  et des autres données du problème.

### 30. Convection naturelle entre deux plans (M. Van Keymeulen, É. Rieckenberg, A. Savary)

On considère un fluide de masse volumique  $\rho$  et de viscosité cinématique  $\nu$  placé entre deux plaques verticales parallèles, de hauteur  $h$ , séparées d'une distance  $d$ . On note  $\vec{g} = -g \vec{u}_z$  le champ de pesanteur. On néglige l'influence de la pression sur la masse volumique ;  $\rho$  est donc fonction de la température uniquement. L'origine des altitudes est prise au bas des plaques.

1. Pour l'instant, les deux plaques sont portées à la même température  $T_0$  et la masse volumique prend la valeur  $\rho_0$  uniforme. Exprimer à une constante près la pression  $P_0(M)$  en un point  $M$  quelconque dans le fluide immobile.

2. Dorénavant, la plaque gauche est maintenue à la température  $T_0$  mais celle de droite est portée à la température constante  $T_1 = T_0 + \theta$  avec  $\theta \geq 0$ . En supposant toujours le fluide immobile, exprimer le champ de température  $T(M)$  entre les plaques en négligeant les effets de bord.

Dans la suite, on note  $\delta T = T - T_0$  l'écart local de température par rapport à la situation de repos.

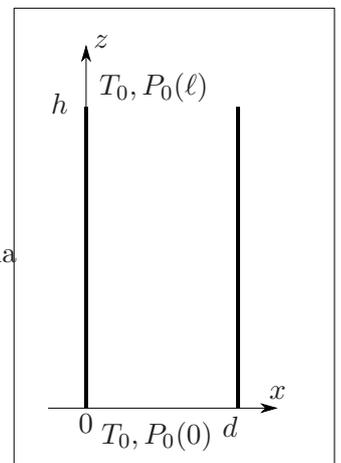
3. La fluide présente un coefficient de dilatation isobare  $\alpha$  dont on rappelle la définition

$$\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_P .$$

Justifier la seconde égalité. Pour l'eau à 25 °C, on donne  $\alpha = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ K}^{-1}$ . Dans le modèle du gaz parfait, le calculer pour l'air et température ambiante.

4. L'élévation de température  $\delta T$  provoque une *petite* variation de la masse volumique, qui passe de  $\rho_0$  à  $\rho_0 + \delta \rho$ . Donner une expression de  $\delta \rho$  faisant intervenir  $\alpha$ . Qu'entend-on exactement par *petite* variation ? Numériquement, quelle contrainte cela impose-t-il à  $\theta$  ?

En l'absence de paroi contraignant le mouvement du fluide, il est bien connu que des masses de fluide plus chaudes que celles qui les entourent, et donc moins denses, ont tendance à s'élever dans le champ de pesanteur. Ce phénomène de *convection naturelle* intervient ici aussi. Pour l'étudier, on suppose qu'à ses extrémités



inférieure et supérieure, la couche d'air limitée par les plaques débouche sur l'air ambiant de température  $T_0$  et de pression  $P_0$  (celle la première question, évaluée en  $z = 0$  ou en  $z = h$ ). Dans la couche d'épaisseur  $d$  le fluide se met à bouger ; la pression s'écarte de  $P_0$  et on la note  $P(M) = P_0(M) + p(M)$  avec  $p \ll P_0$ . On cherche la vitesse de l'écoulement sous la forme  $\vec{v} = v(x) \vec{u}_z$ .

5. Justifier sommairement que le champ de température s'exprime comme dans la question 2 malgré le mouvement du fluide.

6. Écrire l'équation de Navier-Stokes en négligeant tous les termes d'ordre 2, les grandeurs  $\delta\rho$ ,  $p$  et  $v$  étant vus comme des infiniment petits d'ordre 1. Projeter sur les vecteurs unitaires  $\vec{e}_x$ ,  $\vec{e}_y$  et  $\vec{e}_z$ .

7. Justifier que  $p$  est nul puis en déduire la relation

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{\alpha\theta xg}{\nu d} .$$

8. Exprimer le champ de vitesse et représenter ses variations.

9. Les plaques présentent une longueur  $L$  dans la direction de  $\vec{e}_y$ . Exprimer le débit volumique de fluide  $D_v$  entre les plaques ainsi que la vitesse moyenne  $U$  définie par  $D_v = ULd$ .

10. Calculer numériquement  $U$  dans le cas de l'eau ( $\nu = 1,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ) et dans celui de l'air ( $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ), pour  $d = 1 \text{ cm}$  et  $\theta = 10 \text{ K}$ .

Passons à l'aspect thermodynamique de ce phénomène. Le fluide entre par le bas à la température  $T_0$  et en ressort par le haut à une température plus élevée et se mélange rapidement au fluide environnant. Grâce à sa circulation entre les plaques thermostatées desquelles il reçoit de la chaleur, il assure donc par convection un transfert d'énergie de bas en haut.

11. On se limite pour l'instant à une tranche infinitésimale de fluide de largeur  $dx$  et de longueur  $L$  (selon  $\vec{e}_y$ ), s'étendant de l'ouverture inférieure (où sa température est  $T_0$ ) à l'ouverture supérieure (où sa température est  $T_0 + \delta T(x)$ ). Par un bilan enthalpique, exprimer la puissance thermique infinitésimale  $dP_Q$  que cette tranche reçoit. On fera intervenir la capacité calorifique massique à pression constante  $c_p$ . Comme on raisonne au premier ordre, on pourra faire l'approximation  $\rho \simeq \rho_0$ .

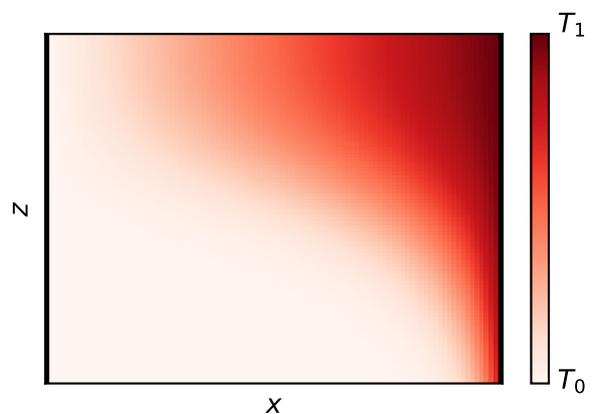
12. Montrer que la puissance thermique transportée par l'écoulement est donnée par

$$P_Q = \frac{\rho_0 c_p \alpha \theta^2 g d^3 L}{45 \nu}$$

et la calculer numériquement pour l'eau ( $c_p = 4,18 \text{ kg} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $\rho_0 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , et l'air ( $c_p = 1,0 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\rho_0 = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) avec  $L = 1 \text{ m}$ .

13. Expliquer pourquoi, avec le profil de température déterminé dans la question 2 et utilisé depuis, le transfert global de chaleur depuis l'ensemble des deux plaques vers le fluide est nul. Est-ce cohérent avec le résultat de la question précédente ?

Pour comprendre l'échange de chaleur entre le fluide et les plaques, il faut analyser plus finement le profil de température. Lorsque l'air frais entre par le bas, il se réchauffe peu à peu, de proche en proche, en longeant la paroi chaude de température  $T_1$  et ce n'est qu'après avoir parcouru une certaine distance  $\ell$  que le profil de température linéaire s'établit. La figure ci-contre montre schématiquement, par des niveaux de couleur, le comportement du champ de température dans la partie inférieure de la couche et permet de mieux saisir la situation.



14. Dans cette question on cherche un ordre de grandeur de  $\ell$ . Pour cela, on suppose que le fluide s'écoule de bas en haut à la vitesse uniforme  $U$  (alors qu'en réalité sa vitesse dépend de  $x$ ). On assimile la longueur  $\ell$  à celle que parcourt une particule fluide à partir de l'entrée, pendant le temps  $t$  que la chaleur met à diffuser sur l'épaisseur  $d$  de la couche d'air. En déduire un expression de  $\ell$  en fonction de  $d$ ,  $U$  et du coefficient de diffusion thermique  $D$  du fluide. À quelle occasion avons-nous déjà rencontré un raisonnement analogue ?

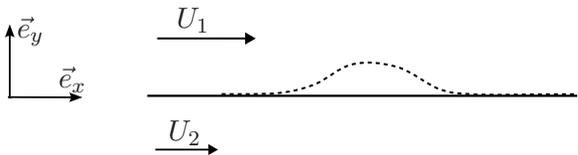
15. Pour estimer le flux thermique  $\Phi$  de la plaque chaude vers le fluide, on fait un raisonnement grossier reposant sur deux hypothèses.

- Ce transfert ne s'effectue que sur la région de longueur  $\ell$ .
- Le gradient de température près de la plaque chaude vaut  $\theta/(d/2)$ . Près de l'autre plaque il est nul car l'air à son contact n'est pas encore échauffé.

En introduisant la conductivité thermique  $\lambda$  du fluide, en déduire une expression de  $\Phi$ . Vérifier que l'on retrouve, à des facteurs sans dimension près, l'expression de  $P_Q$  calculée dans une question précédente.

### 31. Naissance de l'instabilité de Kelvin-Helmholtz (T. Vanderbeken)

On considère deux fluides non miscibles désignés par les indices (1) et (2), de masses volumiques  $\rho_1$  et  $\rho_2$ , présentant une interface plane et s'écoulant parallèlement à cette interface à des vitesses  $U_1 \vec{e}_x$  et  $U_2 \vec{e}_x$ , initialement constantes et uniformes. Lorsque les valeurs numériques de  $U_1$  et  $U_2$  sont « suffisamment éloignées », on constate que cette interface tend à se déformer et à présenter des ondulations conduisant à la formation de vagues. Ce phénomène s'observe en laboratoire, mais aussi dans l'atmosphère où il se manifeste par d'étranges nuages périodiques comme le montre la photographie<sup>5</sup>. Ce bref exercice permet de comprendre de manière qualitative l'existence de cette instabilité. Il n'étudie pas précisément les conditions de son apparition ni la forme des « vagues » qui en résultent. Le problème est supposé invariant par translation orthogonalement au plan de la figure.



1. On imagine qu'une perturbation d'origine inconnue entraîne l'apparition d'une bosse sur l'interface (en pointillés sur la figure). Très loin de cette proéminence (dans toutes les directions), l'écoulement n'est pas modifié, mais à son voisinage, les champs vitesses  $\vec{v}_1(M)$  et  $\vec{v}_2(M)$  diffèrent notablement de  $U_1 \vec{e}_x$  et  $U_2 \vec{e}_x$ . Faire un schéma et représenter l'allure des lignes de courant de manière à montrer comment la présence de la bosse les affecte.

2. L'écoulement est supposé stationnaire, parfait et incompressible. Expliquer comment les champs de pression  $P_1$  et  $P_2$  sont modifiés près de la bosse. Cette modification tend-elle à faire disparaître la bosse ou au contraire à l'aggraver ?

Pour analyser plus en détail le phénomène, il faut notamment prendre en compte l'effet stabilisateur de la différence de masse volumique des deux fluides. Kelvin a établi une modélisation mathématique complète du phénomène.

### 32. Écoulement magnétohydrodynamique entre deux plans (T. Vuillemin)

Un fluide conducteur neutre, incompressible, de masse volumique  $\rho$ , de conductivité électrique  $\gamma$  et de viscosité dynamique  $\eta$  occupe l'espace limité par deux plaques immobiles d'équations  $z = -a/2$  et  $z = a/2$  dans un repère orthonormé direct. Cette région est plongée dans un champ magnétique constant et uniforme  $B_0 \vec{u}_z$ . On ne considère pas l'effet de la gravité. On rappelle qu'en présence d'un champ magnétique, la loi d'Ohm locale doit être modifiée en prenant en compte le produit vectoriel de la vitesse par ce champ.

1. On applique un champ électrique électrique  $E_0 \vec{u}_y$ . Expliquer pourquoi le fluide se met en mouvement et dire dans quelle direction.

2. Le fluide n'est soumis à aucun gradient de pression selon  $\vec{u}_x$ . En régime permanent, rechercher un champ de vitesse de la forme  $\vec{v} = v(z) \vec{u}_x$ . On posera  $\alpha = B_0 \sqrt{\frac{\gamma}{\eta}}$  et  $V_0 = \frac{E_0}{B_0}$ .

3. On donne  $a = 1$  cm. Le fluide est du mercure caractérisé par  $\gamma = 10,2 \cdot 10^5$  S.m<sup>-1</sup>,  $\eta = 1,55 \cdot 10^{-3}$  Pa.s. Représenter les variations de  $v$  avec  $z$  pour  $B_0 = 1$  T,  $B_0 = 0,1$  T et  $B_0 = 0,01$  T.

4. À cause des courants volumiques régnant dans le fluide, le champ magnétique ne se réduit pas à  $\vec{B}_0$ , mais présente un terme additionnel  $\vec{B}_1$ . Déterminer la direction de  $\vec{B}_1$  et montrer que sa prise en compte n'invalide pas le champ de vitesse trouvé précédemment. Exprimer ce champ magnétique  $\vec{B}_1$ .

5. Prise par le Dr. Baptiste Doms en 2023 à Toulon.

### 33. Dépôt d'isolant sur un fil électrique (T. Wach)

Pour déposer une couche isolante sur un fil conducteur, on procède comme suit (voir figure 14). Un tube vertical de rayon  $b = 5 \text{ mm}$  et de longueur  $L = 20 \text{ cm}$  est partiellement immergé dans un isolant fondu. Le fil de rayon  $a = 1 \text{ mm}$  est tiré verticalement au travers de ce tube avec une vitesse  $U = 1 \text{ m.s}^{-1}$ . L'isolant en fusion, entrainé par le mouvement du fil, se solidifie rapidement sans changer de volume après sa sortie du tube.

L'écoulement est supposé laminaire, à symétrie cylindrique, avec un profil de vitesse indépendant de  $z$ . On néglige tout effet de bord ainsi que l'influence de la gravité. La pression est supposée uniforme. L'isolant en fusion a pour masse volumique  $\rho = 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$  et viscosité dynamique  $\eta = 0,1 \text{ Pa.s}$ .

1. Déterminer le champ de vitesse dans le fluide contenu entre le fil et le tube.
2. Calculer le débit correspondant.
3. Déterminer le rayon  $c$  de la gaine isolante obtenue après solidification.
4. Calculer la force avec laquelle il faut tirer le fil.
5. Analyser la pertinence de l'approximation qui consiste à négliger le poids.

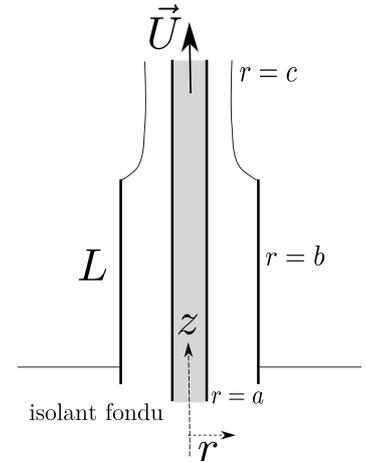
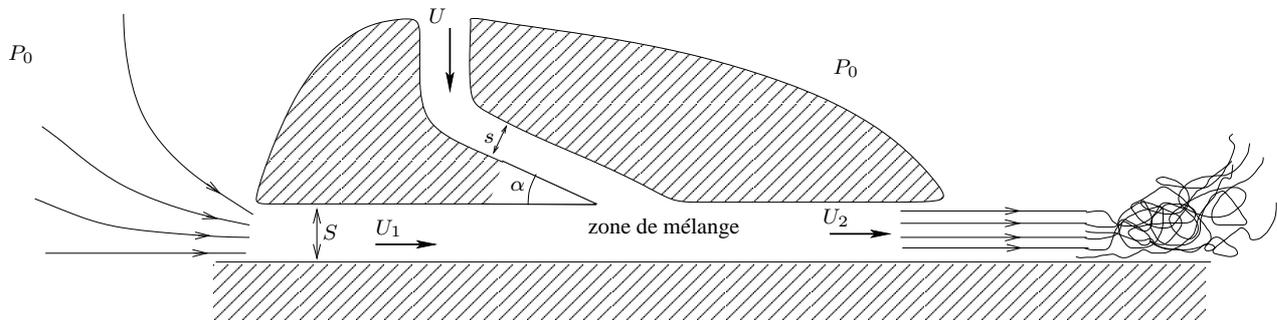


FIGURE 14 –

### 34. Ventilation d'un tunnel (L. Waltisperger)

Un tunnel rectiligne de section  $S$  est ventilé par une galerie latérale de section  $s$ . Une soufflerie y impose un flux d'air de vitesse  $U$  jusqu'à la jonction avec la galerie principale sous l'angle  $\alpha$ . Il s'établit alors dans le tunnel un écoulement que l'on souhaite étudier. On note pour cela  $\vec{U}_1 = U_1 \vec{e}_x$  et  $\vec{U}_2 = U_2 \vec{e}_x$  la vitesse de l'air, supposée uniforme sur toute la section, à gauche et à droite de la jonction. Près de la jonction, les trois flux se mélangent et les grandeurs définissant l'écoulement ne peuvent pas être définies aussi simplement.

On pose  $r = s/S$  et  $\eta = U_1/U$ . L'écoulement de l'air de masse volumique  $\rho$  est supposé parfait, stationnaire et incompressible et les effets de la pesanteur négligeables. On remarquera la dissymétrie entre l'amont, où des lignes de courant bien définies parviennent de l'infini, et l'aval où l'air s'échappe en un jet qui se mélange ensuite avec l'air ambiant par des turbulences, en aval de la zone représentée.



1. Dans un premier temps on suppose que les conditions de fonctionnement sont telles que l'écoulement s'effectue de la gauche vers la droite comme représenté sur la figure. On remarquera l'absence de symétrie entre l'amont, où des lignes de courant bien définies parviennent de l'infini, et l'aval où l'air s'échappe en un jet qui se mélange ensuite avec l'air ambiant par des turbulences.

Déterminer  $p_1$  et  $p_2$  en fonction de  $P_0$ ,  $\rho$  et  $U_1$ .

2. Utiliser deux bilans pour exprimer  $\eta$  en fonction de  $r$  et  $\alpha$ . On négligera la résultante des forces de pression sur la section de la galerie d'aération. Préciser la valeur  $r_{max}$  à ne pas dépasser pour que l'écoulement ait lieu dans le sens étudié ici.
3. Dans le cas  $r > r_{max}$ , l'air sort du tunnel par ses deux extrémités. Par analogie avec la situation précédente, dessiner l'allure des lignes de courant puis trouver la nouvelle expression de  $\eta$ .

### 35. Dérive d'une boule flottante (F. Xu)

Une boule sphérique de rayon  $R$  flotte à la surface d'un plan d'eau naturel tel qu'un fleuve, un lac, ou la mer. Sa moitié supérieure se trouve au contact de l'air de masse volumique  $\rho_1$  alors que sa moitié inférieure est immergée dans l'eau de masse volumique  $\rho_2$ . Dans le référentiel terrestre, le vent souffle avec un vecteur vitesse  $\vec{U}_1$  et l'eau s'écoule avec un vecteur vitesse  $\vec{U}_2$ . Les deux fluides agissent sur la boule qui se déplace donc elle aussi. Le but de l'exercice est de déterminer sa vitesse  $\vec{U}$ .

1. Quels sont les vecteurs vitesses  $\vec{U}'_1$  et  $\vec{U}'_2$  de l'air et de l'eau par rapport à la boule ?
2. En introduisant les coefficients de traînées  $C_{x1}$  et  $C_{x2}$ , exprimer les normes  $|\vec{F}_1|$  et  $|\vec{F}_2|$  des forces exercées par l'air et l'eau sur la boule. Comment ces forces sont-elles dirigées ?
3. On étudie uniquement un régime stationnaire dans lequel la vitesse  $\vec{U}$  est constante. Que dire de  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  dans ce cas ?
4. Pour simplifier, on suppose pour l'instant que  $\vec{U}_1$  et  $\vec{U}_2$  sont colinéaires et on note  $\vec{U}_1 = U_1 \vec{u}_x$ ,  $\vec{U}_2 = U_2 \vec{u}_x$ ,  $\vec{U} = U \vec{u}_x$ . Exprimer  $U$  en fonction de  $U_1$ ,  $U_2$  et d'autres grandeurs de l'énoncé. On supposera que les régimes d'écoulement sont turbulents.
5. On donne les masses volumiques  $\rho_1 = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\rho_2 = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ , les vitesses  $U_1 = 100 \text{ km/h}$ ,  $U_2 = 5 \text{ km/h}$ , les viscosités cinématiques  $\nu_1 = 1.10^{-6} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ ,  $\nu_2 = 1,4.10^{-5} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$ . Calculer numériquement  $U$  et vérifier les hypothèses.
6. Dorénavant, on ne suppose plus les vecteurs  $\vec{U}_1$  et  $\vec{U}_2$  colinéaires. La direction de dérive de la boule est a priori inconnue, ce qui complique la situation. Faire un dessin dans le plan montrant schématiquement les vecteurs  $\vec{U}_1$ ,  $\vec{U}_2$ ,  $\vec{U}$ ,  $\vec{U}'_1$  et  $\vec{U}'_2$ .
7. Justifier que les vecteurs  $\vec{U}'_1$  et  $\vec{U}'_2$  sont colinéaires et de sens opposés. On pose  $\vec{U}'_1 = -\alpha \vec{U}'_2$ .
8. En utilisant les questions précédentes, déterminer  $\alpha$  puis exprimer  $\vec{U}$  en fonction de  $\vec{U}_1$ ,  $\vec{U}_2$  et d'autres données de l'énoncé. Il resterait à vérifier le caractère turbulent des écoulements, mais nous y renonçons !

## Électromagnétisme et induction

### 36. Micro pour guitare électrique (R. Cassard)

Pour traiter cet exercice, on utilisera le fait qu'un objet en acier possède des propriétés particulières. Plongé dans un champ magnétique créé par d'autres sources (courants électriques ou aimants), il s'aimante et la carte champ magnétique, tout comme sa valeur numérique en chaque point, se trouvent modifiées par la présence de cet objet.

Les guitares électriques comportent un transducteur qui produit un signal électrique à partir du mouvement des cordes. Ce signal est ensuite envoyé à un amplificateur puis à un haut parleur pour produire un son. En français, ce transducteur est par abus de langage appelé « micro », mais on emploie parfois l'anglicisme « pickup » pour le désigner car il ne s'agit pas à proprement parler d'un microphone. En effet, ce n'est pas la vibration de l'air qu'il détecte, mais celle de la corde.

On distingue deux familles de « micro » : les micros piézoélectriques d'une part et les micros magnétiques d'autre part. Ce sont les seconds que nous étudions ici. Un micro magnétique est constitué de petits aimants cylindriques droits d'axe polaire parallèle à l'axe du cylindre, chacun d'eux placé juste sous une corde en acier de la guitare. Sur ces aimants est enroulée une bobine détectrice formée d'un fil conducteur et dont les extrémités sont connectées à des câbles.

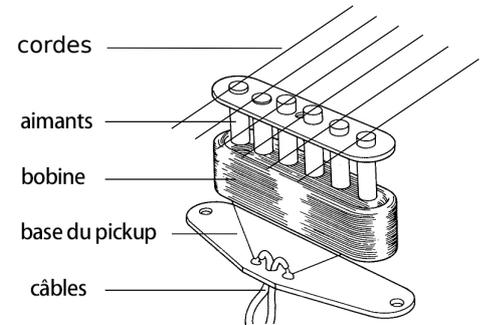


FIGURE 15 – Micro magnétique pour guitare électrique

1. Expliquer comment ce dispositif permet d'obtenir un signal électrique aux bornes de la bobine à partir du mouvement des cordes.
2. Pour sonoriser un instrument de musique (une guitare sèche par exemple), on peut aussi utiliser de véritables microphones qui captent *le son* produit par la corde, mais ils donnent parfois lieu à un effet Larsen gênant. Connaissez-vous ce phénomène ? Analyser son apparition éventuelle avec les « micros » magnétiques.
3. Lorsque l'appareil est utilisé près d'une installation électrique (ce qui est presque toujours le cas, puisque chaque bâtiment est aujourd'hui équipé de l'électricité), les bobines produisent un signal même en l'absence de mouvement des cordes, c'est à dire quand le musicien ne joue pas, et cela produit un bourdonnement parasite désagréable dans les haut-parleurs. Pouvez-vous expliquer ce phénomène ?
4. Pour éviter ce désagrément, on remplace chaque aimant par une paire d'aimants dont les axes sont parallèles mais les pôles inversés, et on dispose une bobine autour de chacun d'eux. Les deux bobines sont placées en série et le sens d'enroulement du fil est inversé de l'un à l'autre. La figure ci-dessous représente schématiquement la situation avec une seule paire d'aimants (correspondant à une seule corde) et la photographie montre le dispositif complet formé de 6 paires, appelé « humbucker ».

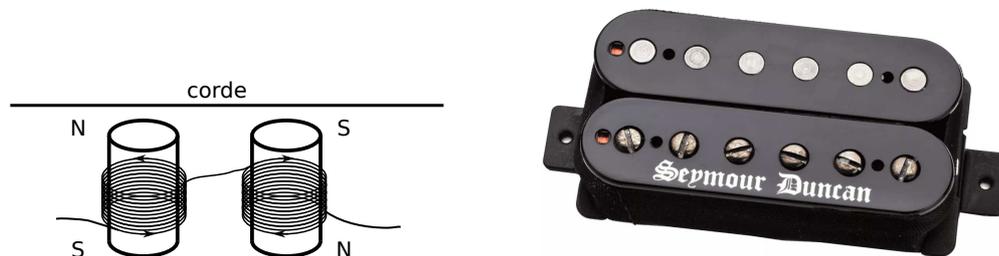
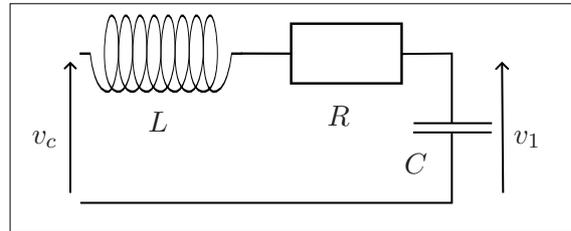


FIGURE 16 – À gauche : principe d'un « micro » à double bobinage. À droite : photographie d'un humbucker pour 6 cordes.

Expliquer comment ce système supprime le ronronnement parasite tout en détectant la vibration de la corde.

5. Dans cette question, on se limite à un seul micro au lieu de 6 et on se place dans le cas d'un bobinage simple et non pas double. On a donc affaire à un seul aimant et un seul bobinage qu'on modélise par un solénoïde infini de rayon  $r = 2,184 \text{ mm}$  et de longueur  $\ell = 10 \text{ mm}$ . Combien de tour doit comporter la bobine pour atteindre une inductance propre  $L = 5 \text{ H}$  ? Pour ce calcul, on remplacera la perméabilité magnétique du vide  $\mu_0$  par celle de l'acier  $\mu = 8,75 \cdot 10^{-4} \text{ H.m}^{-1}$ .

6. Pour fabriquer la bobine, on utilise un fil de cuivre très fin<sup>6</sup> de diamètre  $d = 0,056$  mm et de conductivité  $\gamma = 5,8 \cdot 10^7$  S.m<sup>-1</sup>. Déterminer la résistance  $R$  de la bobine.
7. En réalité, la bobine fait le tour des 6 aimants et sa résistance est  $R = 6$  k $\Omega$ . Les différentes spires de la bobine, placées les unes contre les autres, se comportent comme de minuscules condensateurs et confèrent à la bobine une capacité parasite  $C = 100$  pF. Le modèle complet de la bobine est représenté ci-dessous. La tension  $v_c$  est due au mouvement de la corde et la tension  $v_1$  est celle qu'on envoie vers l'amplificateur. Étudier en fonction de la fréquence la relation liant  $v_c$  à  $v_1$ . Commenter en lien avec l'application à la guitare électrique.



### 37. Stockage gravitaire d'énergie dans un puits de mine (Y. Azakraoui)

La société écossaise Gravitricity envisage d'utiliser d'anciens puits de mines afin d'y stocker de l'énergie sous forme gravitaire. La technique, très simple dans son principe, consiste à déplacer verticalement de lourdes charges dans le puits pour emmagasiner de l'énergie depuis un réseau électrique ou, au contraire, pour alimenter ce réseau.

*Certaines données nécessaires à la résolution des questions ne sont pas fournies ; leur introduction est laissée à l'initiative des candidats.*

1. Vu de l'extérieur, ce dispositif s'apparente à une batterie géante. Où se situent les masses mobiles lorsque la « batterie » est chargée ?
2. Quelle énergie peut-on stocker en utilisant une masse de 5000 tonnes et un puits de profondeur 1500 m ? On exprimera le résultat en kWh.
3. À partir de quelle profondeur faut-il tenir compte des variations du champ de gravité, si on souhaite calculer l'énergie stockée avec une erreur relative ne dépassant pas 1/1000. Commenter.
4. Quel phénomène physique exploitent les dispositifs qui convertissent l'énergie ainsi stockée en énergie électrique, et inversement ?

### 38. Force de London (J. Bassène, M. Bédel)

La force de London est l'une des trois interactions de Van der Waals. Elle décrit l'attraction de deux molécules neutres et apolaires, phénomène associé aux oscillations quantiques de la densité électronique.

1. On modélise un édifice moléculaire par une charge positive  $q$  immobile en  $O$ , représentant les noyaux atomiques, et une charge  $-q$  de masse  $m$  placée en  $A$  correspondant au nuage électronique. Pour une molécule apolaire, les deux points coïncident au repos. Lorsque  $A$  se déplace, on le suppose rappelé vers sa position de repos par une force élastique<sup>7</sup> de la forme  $\vec{F} = -k\vec{OA}$ . Cette force modélise toutes les interactions électrostatiques au sein de la molécule *et elles n'ont donc pas à être prises en compte autrement par la suite*. On applique à la molécule un champ électrique extérieur  $\vec{E}$ . En considérant l'équilibre de  $A$  dans  $\vec{E}$ , montrer que la polarisabilité de volume  $\alpha$  de la molécule s'exprime par  $\alpha = \frac{q^2}{k\epsilon_0}$ .
2. Dans cette question et les deux suivantes, aucun champ électrique ne s'applique à la molécule. On note  $m$  la masse du nuage électronique représenté par  $A$ . Montrer qu'il se comporte comme un oscillateur harmonique et exprimer la pulsation propre  $\omega_0$  correspondante.
3. Soit  $x_0$  l'amplitude d'oscillation de  $A$ . Quelle est, en mécanique classique, son énergie mécanique ? On suppose que cet oscillateur se trouve dans l'état de plus basse énergie d'un oscillateur harmonique quantique. En déduire l'expression de  $x_0$  en fonction de la constante de Planck réduite  $\hbar$ , de  $m$  et de  $\omega_0$ .
4. Exprimer en fonction de  $\alpha$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\hbar$ ,  $q$  et  $m$  l'amplitude  $p_0$  du dipôle électrique oscillant formé par la molécule. La calculer numériquement avec  $q = e$ ,  $\alpha = 1 \cdot 10^{-30}$  m<sup>3</sup>,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  F.m<sup>-1</sup>,  $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}$  J.s,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  kg. Commenter le résultat sachant qu'une molécule polaire telle que HCl possède un moment dipolaire  $p = 4 \cdot 10^{-30}$  C.m.

6. de type American Wire Gauge 43

7. Cf le modèle de Thomson vu en cours pour l'interprétation

5. À cause de ces oscillations quantiques, deux molécules voisines identiques présentent des interactions de type dipôle-dipôle même si elles sont en moyenne apolaires. Ces molécules sont situées en  $O_1$  et  $O_2$  avec  $\overrightarrow{O_1O_2} = r \overrightarrow{u_x}$ . À l'instant  $t$ , elles portent des moments dipolaires  $\overrightarrow{p_1}(t)$  et  $\overrightarrow{p_2}(t)$  dirigés selon  $\overrightarrow{u_x}$ . On note  $x_1 = \overrightarrow{O_1A_1}$  et  $x_2 = \overrightarrow{O_2A_2}$  les déplacements des charges négatives dans chacune des deux molécules, très inférieurs  $r$ .

Exprimer le champ électrique créé par  $\overrightarrow{p_1}$  en  $O_2$ . En déduire la force  $\overrightarrow{F_2}$  subie par  $A_2$  de la part de  $\overrightarrow{p_1}$  et, symétriquement, celle  $\overrightarrow{F_1}$  exercée par  $\overrightarrow{p_2}$  sur  $A_1$ .

6. On définit une énergie potentielle d'interaction  $U(x_1, x_2)$  associée aux forces  $\overrightarrow{F_1}$  et  $\overrightarrow{F_2}$  par

$$F_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1} \quad F_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} \quad .$$

Il est important de comprendre ici que l'interaction mutuelle des deux molécules est décrite par une seule et même fonction  $U$  dépendant des variables  $x_1$ ,  $x_2$  et  $r$ . Vérifier que l'expression suivante de  $U$  est acceptable :

$$U = -\beta x_1 x_2 \quad \text{avec} \quad \beta = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 r^3} \quad .$$

Une des enjeux de la théorie est de montrer comment on obtient une interaction en  $1/r^6$  à partir de  $U$  qui est en  $1/r^3$ .

7. Écrire les équations du mouvement dont  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  sont solutions.

8. Montrer que l'énergie mécanique

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}kx_2^2 + U(x_1, x_2)$$

se conserve et interpréter chacun des termes.

9. Pour découpler les équations de mouvement, on introduit les nouvelles variables

$$S = x_2 + x_1 \quad D = x_2 - x_1 \quad .$$

Éliminer  $x_2$  et  $x_1$  dans l'expression de  $\mathcal{E}$  de manière à l'exprimer en fonction de  $S$ ,  $D$ ,  $\dot{S}$ ,  $\dot{D}$  et des différentes constantes du problème. Faire apparaître la somme de deux termes : l'un correspondant à un oscillateur harmonique de masse  $m/2$  et de raideur  $k_s$  associé à la variable  $S$ , l'autre à un oscillateur harmonique de masse  $m/2$  et de raideur  $k_D$  associé à la variable  $D$ . Préciser la pulsation propre de chacun d'eux.<sup>8</sup>

10. La forme de  $\mathcal{E}$  mise en évidence ci-dessus permet d'affirmer que dans le cadre de la mécanique quantique, l'énergie du système s'obtient en sommant celles des deux oscillateurs harmoniques. En déduire la valeur de  $\mathcal{E}$  dans l'état fondamental.

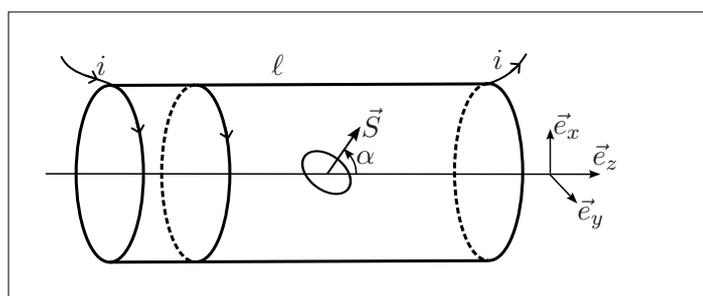
11. En supposant  $\beta \ll k$ , exprimer  $\mathcal{E}$  en fonction de  $\hbar$ ,  $\omega_0$ ,  $\beta$  et  $k$  à l'ordre 2 en  $\beta/k$ . Identifier un terme  $\mathcal{E}_{int}$  traduisant l'interaction des deux molécules.

12. Exprimer finalement  $\mathcal{E}_{int}$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\hbar$ ,  $\omega_0$  et  $r$ . Êtes-vous satisfait de l'exposant que porte  $r$  ?

### 39. Rotation d'un aimant dans un solénoïde (M. Benoit)

On considère un solénoïde de longueur  $\ell$ , de rayon  $a \ll \ell$ , possédant  $n$  spires par unité de longueur, dont les extrémités ont été reliées par un fil de manière à former un circuit fermé de résistance  $R$  (ce fil n'est pas représenté sur la figure). On note  $i$  l'intensité qui le parcourt.

1. Une petite spire d'aire  $S$  est introduite dans le solénoïde et orientée de telle manière que sa normale forme un angle  $\alpha$  avec l'axe de révolution  $\vec{e}_z$  du solénoïde. Exprimer l'inductance propre du solénoïde et le coefficient de mutuelle induction  $M$  entre les deux circuits.



8. Dans le langage de ses mathématiques,  $\mathcal{E}$  est une forme quadratique que l'on diagonalise.

2. La spire précédente est retirée. On la remplace par un aimant permanent de moment dipolaire magnétique  $\mathcal{M}$  orienté de la même manière que  $S$  dans la situation précédente. Un opérateur l'entraîne en rotation à la vitesse angulaire constante  $\omega$  autour de  $\vec{e}_y$  de manière que le vecteur  $\vec{M}$  tourne dans le plan  $(\vec{e}_x, \vec{e}_z)$ . L'angle  $(\vec{e}_z, \vec{M})$  s'identifie donc à  $\alpha = \omega t$ . Déterminer, en régime sinusoïdal forcé, l'intensité  $i(t)$  qui circule dans le solénoïde. On posera  $A = \mu_0 n \mathcal{M} / L$  et  $\tau = L / R$ . Quelle est la dimension de  $A$  ?

3. Exprimer le couple  $\vec{\Gamma}_{\text{op}}$  que l'opérateur exerce pour maintenir constante la vitesse de rotation de l'aimant, puis sa valeur moyenne dans le temps.

4. Analyser méticuleusement la situation d'un point de vue énergétique.

#### 40. Condensateur cylindrique (A. Carpentier)

Un condensateur est formé de deux cylindres coaxiaux en métal de rayons  $R_1$  et  $R_2 > R_1$ , de longueur  $\ell$  et séparés l'un de l'autre par de l'air. Les cylindres intérieur et extérieur portent respectivement les charges électriques  $Q$  et  $-Q$ . En négligeant tout effet de bord, trouver l'expression du champ électrique entre les deux cylindres puis en déduire la capacité de ce condensateur.

#### 41. Champ magnétique dans un câble coaxial (A. Coquillard)

Un câble coaxial est constitué par un conducteur cylindrique plein de rayon  $a$ , appelé « âme », entouré par un conducteur externe occupant l'espace compris entre les cylindres de rayons  $b$  et  $c$ , appelé « gaine » (avec  $a < b < c$ ). Un courant d'intensité  $I$  circule dans l'âme parallèlement à l'axe de révolution du cylindre. Dans la gaine, un courant de même intensité  $I$  circule en sens inverse. On suppose que ces courants se répartissent uniformément sur la section des deux conducteurs.

- Déterminer le champ magnétique  $\vec{B}$  en tout point de l'espace et représenter ses variations.
- On suppose dorénavant que  $b$  et  $c$  sont très proches de manière à négliger la contribution de la gaine aux grandeurs à calculer. Exprimer l'énergie magnétique emmagasinée dans un tronçon de longueur  $h$  de ce câble.
- En déduire l'inductance  $\Lambda$  par unité de longueur de ce câble. La calculer numériquement pour  $a = 0,48$  mm et  $b = 1,48$  mm.

#### 42. Résistance et effet de peau (V. Creusot)

Lorsque la fréquence du courant électrique augmente, on constate que la résistance des fils conducteurs devient de plus en plus grande. On interprète ce comportement par l'effet de peau, phénomène dans lequel le courant électrique se concentre près de la surface du métal et ne circule presque plus dans son cœur. Pour l'étudier, on considère dans un premier temps une pièce métallique de conductivité  $\gamma$  occupant le demi-espace  $z \geq 0$  et dans laquelle le courant électrique circule dans la direction de  $\vec{u}_x$ . On admet que le champ électrique  $y$  est donné par

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}} .$$

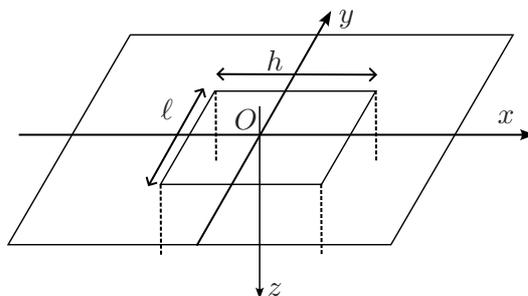


FIGURE 17 – Métal semi-infini

- On considère un segment de longueur  $\ell$  tracé à la surface du conducteur et colinéaire à  $\vec{u}_y$ . Exprimer l'intensité qui traverse la section droite perpendiculaire à  $\vec{u}_x$  et située « sous » ce segment, c'est à dire la surface définie  $x = \text{Cste}$ , par  $0 \leq y \leq \ell$  et  $z \geq 0$ .

2. On considère maintenant un rectangle tracé à la surface du métal dont les côtés ont pour longueurs  $\ell$  (selon  $\vec{u}_y$ ) et  $h$  (selon  $\vec{u}_x$ ). Déterminer la puissance dissipée par effet Joule dans la partie du métal située « sous » ce rectangle, c'est à dire le volume défini par  $0 \leq y \leq \ell$ ,  $0 \leq x \leq h$ ,  $z \geq 0$ .

3. Comment s'exprime usuellement la puissance Joule moyenne  $\langle P \rangle$  dissipée dans une résistance  $R$  parcourue par un courant périodique d'intensité  $I(t)$ ? On convient d'utiliser cette relation comme *définition* de la résistance  $R$  de la partie du métal considérée dans la question précédente. En déduire l'expression de  $R$  en fonction de  $h$ ,  $\ell$ ,  $\gamma$  et  $\delta$ . Commenter le résultat en le rapprochant d'un autre plus courant.

4. Considérons maintenant un fil électrique cylindrique de rayon  $a$  et de conductivité  $\gamma$  parcouru par un courant de pulsation  $\omega$ . L'étude mathématique de l'effet de peau dans cette situation invariante par rotation devrait se faire en coordonnées cylindriques. À quelle condition peut-on approximativement utiliser les résultats précédents, reposant sur une géométrie plane? Exprimer dans ce cadre la résistance d'un tronçon de fil de longueur  $h$ .

5. On considère un fil de cuivre caractérisé par  $a = 1,48 \text{ mm}$  et  $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ . Dans quel intervalle de fréquences l'approximation de la question précédente est-elle valide? Calculer la résistance du fil pour  $L = 100 \text{ m}$  et une fréquence acceptable accessible avec un GBF disponible dans un lycée.

### 43. Inductance propre et effet de peau (M. de Goede)

On utilise généralement le concept d'inductance propre pour caractériser les propriétés magnétiques des circuits filiformes. Cependant, un fil même très fin possède un certain diamètre et on peut s'interroger sur le champ magnétique qui règne à l'intérieur de ce fil et sur ses effets. En régime alternatif, ce champ et la densité volumique de courant associée sont soumis à l'effet de peau : le courant se concentre près de la surface du métal et ne circule presque plus dans son cœur. Pour étudier ce phénomène, on considère dans un premier temps une pièce métallique de conductivité  $\gamma$  occupant le demi-espace  $z \geq 0$  et dans laquelle le courant électrique circule dans la direction de  $\vec{u}_x$ . On admet que le champ électrique  $y$  est donné par

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-z/\delta} \cos(\omega t - z/\delta) \vec{u}_x \quad \text{avec} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

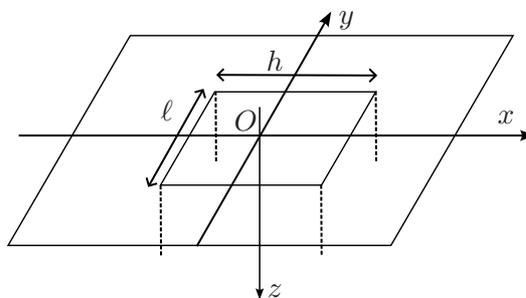


FIGURE 18 – Métal semi-infini

1. On considère un segment de longueur  $\ell$  tracé à la surface du conducteur et colinéaire à  $\vec{u}_y$ . Exprimer l'intensité  $I(t)$  qui traverse la section droite perpendiculaire à  $\vec{u}_x$  et située « sous » ce segment, c'est à dire la surface définie  $x = \text{Cste}$ , par  $0 \leq y \leq \ell$  et  $z \geq 0$ .

2. On considère maintenant un rectangle tracé à la surface du métal dont les côtés ont pour longueurs  $\ell$  (selon  $\vec{u}_y$ ) et  $h$  (selon  $\vec{u}_x$ ). Déterminer l'énergie magnétique moyenne  $\langle \mathcal{E}_m \rangle$  stockée dans le volume de métal situé « sous » ce rectangle, c'est à dire dans la région définie par  $0 \leq y \leq \ell$ ,  $0 \leq x \leq h$ ,  $z \geq 0$  (on parle d'une moyenne temporelle).

3. Comment s'exprime usuellement l'énergie magnétique moyenne  $\langle \mathcal{E}_m \rangle$  stockée dans une bobine d'auto-inductance  $L$  parcourue par un courant périodique d'intensité  $I(t)$ ? On convient d'utiliser cette relation comme *définition* de l'auto-inductance de la partie du métal considérée dans la question précédente. En déduire l'expression de  $L$  en fonction de  $h$ ,  $\ell$ ,  $\mu_0$  et  $\delta$ .

4. Le phénomène étudié ici intervient notamment dans l'inductance parasite des câbles coaxiaux. Considérons un fil électrique cylindrique de rayon  $a$  et de conductivité  $\gamma$  parcouru par un courant de pulsation  $\omega$ . L'étude mathématique de cette situation invariante par rotation devrait se faire en coordonnées cylindriques. À quelle condition peut-on approximativement utiliser les résultats précédents reposant sur une géométrie plane? Exprimer dans ce cadre l'inductance propre d'un tronçon de fil de longueur  $h$ . Comment varie-t-elle avec  $\omega$ ?

5. On considère un fil de cuivre caractérisé par  $a = 1,48 \text{ mm}$  et  $\gamma = 5,8 \cdot 10^7 \text{ S.m}^{-1}$ . Dans quel intervalle de fréquences l'approximation de la question précédente est-elle valide? Calculer l'inductance propre de ce conducteur pour  $h = 100 \text{ m}$  et une fréquence acceptable accessible avec un GBF disponible dans un lycée.

#### 44. Mesure de la composante verticale du champ magnétique terrestre (J. Dequenue)

On réalise le montage de la figure 19, dans lequel l'AO est idéal et fonctionne en régime linéaire et où  $C = 100 \text{ nF}$ . La bobine est formée de  $N = 100$  tours de fil, présente une surface  $S = 19,6 \text{ cm}^2$ , une auto-inductance  $L$  et une résistance électrique  $R = 220 \Omega$ . Au départ, la tension de sortie  $v_s$  est nulle. Puis on retourne la spire face pour face et on mesure une tension  $v_s = 0,7 \text{ V}$ . En étudiant l'évolution de  $v_s$  pendant le retournement de la spire, montrer que ce montage permet la mesure de la composante verticale du champ magnétique terrestre. Quelle valeur obtient-on?

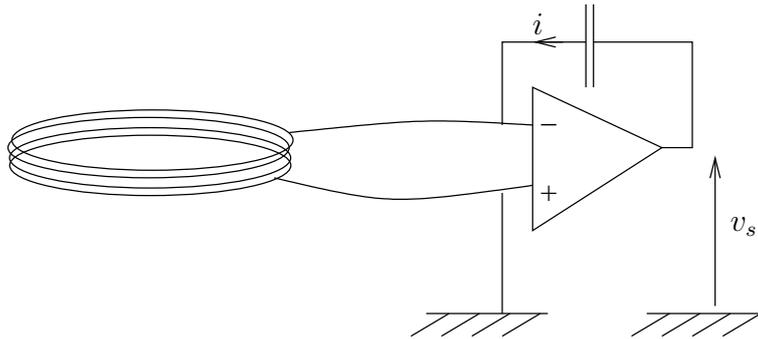


FIGURE 19 – Dispositif pour la mesure du champ magnétique terrestre

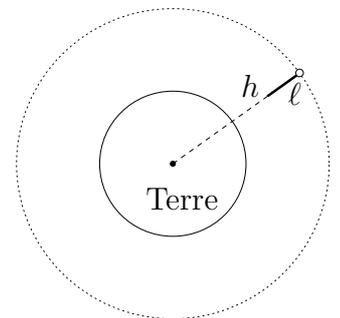
#### 45. Propulsion magnétique d'un satellite (M. Diop)

On envisage ici une technologie de propulsion d'un satellite de masse  $m$  mettant à profit le champ magnétique terrestre. On assimile ce champ à celui d'un dipôle placé au centre de la Terre, dont le moment dipolaire est parallèle à l'axe de rotation de la Terre et dont le pôle nord se situe du côté du pôle sud géographique.

Données : masse de la Terre  $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ , rayon de la Terre  $R_T = 6,4 \cdot 10^3 \text{ km}$ , moment magnétique terrestre  $\mathcal{M} = 7,7 \cdot 10^{22} \text{ A.m}^2$ , masse du satellite  $m = 2 \cdot 10^3 \text{ kg}$ , constante de gravitation  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ kg}$ , altitude du satellite  $h = 800 \text{ km}$ .

1. Le satellite possède une trajectoire circulaire à l'altitude  $h$  dans le plan équatorial. Déterminer sa vitesse et la calculer numériquement. Exprimer son énergie mécanique en fonction de  $G$ ,  $M_T$ ,  $m$ ,  $R_T$  et  $h$ . Dans la suite, on admet la validité de cette expression même si la trajectoire n'est pas exactement circulaire.

2. Un câble conducteur de longueur  $\ell = 20 \text{ m}$ , dont la surface latérale est isolée par une gaine, est suspendu sous le satellite dans la direction pointant vers le centre de la Terre. Un courant électrique peut circuler entre ses deux extrémités et, grâce aux particules chargées de la ionosphère, on obtient un circuit fermé de résistance électrique  $R$ . On admet que la fem induite dans le câble s'exprime de la même manière que pour une barre mobile sur des rails de Laplace.



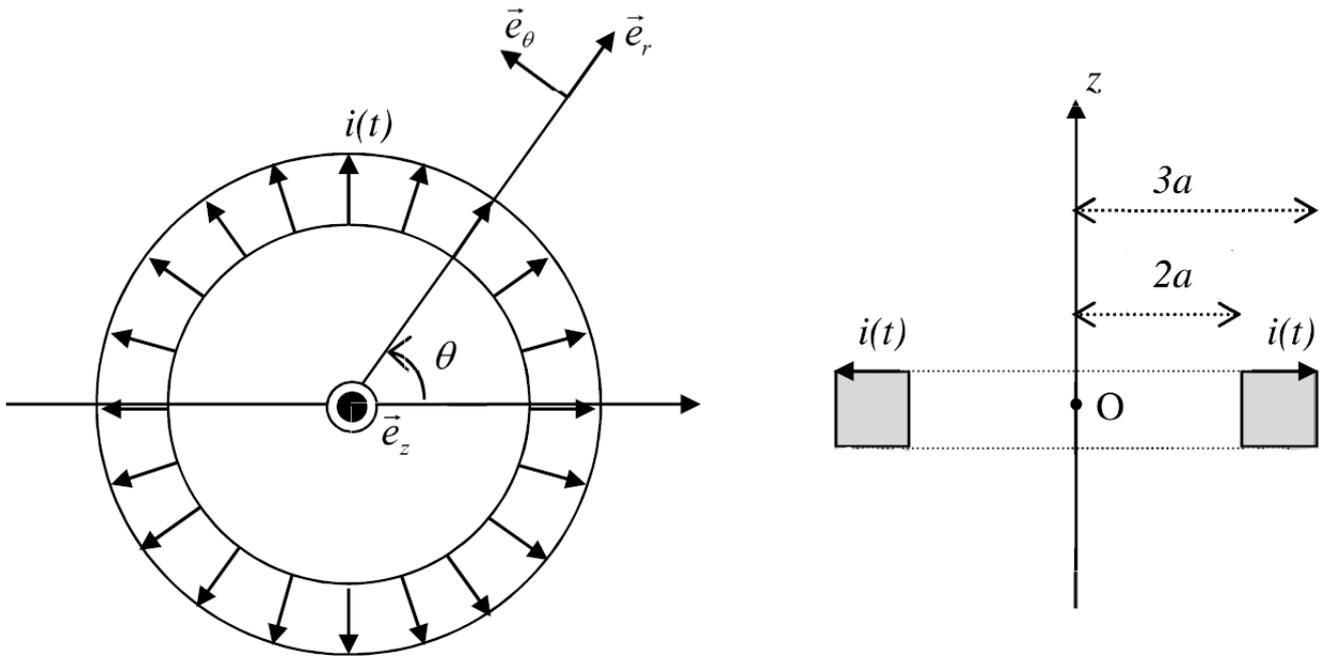
Dans quel sens le courant circule-t-il dans le câble? Sachant que son intensité est de  $0,44 \text{ A}$ , trouver la valeur de  $R$ .

3. Le satellite est muni d'un générateur électrique alimenté par des panneaux solaires et fournissant une puissance  $P = 500 \text{ W}$ . On l'insère en série dans le circuit de la question précédente de manière à contrôler l'intensité du courant et donc la force magnétique s'exerçant sur le câble. Dans quel sens faut-il faire circuler le courant pour que le satellite gagne de l'altitude? Quelle est son intensité?

4. Combien de temps faut-il faire circuler ce courant pour obtenir un gain d'altitude de  $500 \text{ m}$ ?

#### 46. Pince ampèremétrique (V. Dubus)

Une pince ampèremétrique est schématiquement composée de  $N$  spires carrées de côté  $a$  placées en série, de résistance totale  $R$  et disposées sur un tore dont les rayons intérieurs et extérieurs sont respectivement égaux à  $2a$  et  $3a$ . Ce circuit est fermé sur un ampèremètre d'impédance négligeable. Sur l'axe de révolution ( $Oz$ ) de ce tore se trouve un fil rectiligne, supposé infini, dans lequel circule un courant d'intensité  $I = I_0 \cos(\omega t)$ .



Montrer que la mesure de l'intensité  $i$  circulant dans les spires permet d'accéder à  $I_0$ . Établir, en fonction de la pulsation et des caractéristiques du dispositif, le lien entre les deux intensités. Quel est l'intérêt pratique d'un tel système ? Quelles en sont les limitations ?

## Ondes

### 47. Vibration d'une chaîne de charges électriques (H. Fessard)

Des charges électriques ponctuelles de masse  $m$ , de même valeur absolue  $Q$ , alternativement positives et négatives, sont placées à égale distance  $a$  les unes des autres le long de la droite  $(O, \vec{u}_x)$ . Chacune peut se déplacer sans frottement parallèlement à  $\vec{u}_y$ , comme le feraient des perles guidées par des fils rectilignes. On note  $y_n$  le déplacement de la particule de rang  $n$ , avec  $y_n \ll a$ .

1. En ne considérant que les interactions entre plus proches voisins, écrire l'équation du mouvement d'une particule donnée.
2. Effectuer le passage à la limite continue et montrer que le déplacement des particules obéit à une équation d'onde. Donner l'expression de la célérité.
3. Reprendre les questions précédentes en considérant *toutes* les interactions. Quelle difficulté pose dans ce cas la passage à la limite continue ? Pour exprimer la célérité, on utilisera la somme de la série harmonique alternée

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

4. Reprendre l'analyse dans le cas où les charges ponctuelles sont remplacées par des dipôles électriques de masse  $m$  portant alternativement des moments dipolaires  $p\vec{u}_y$  et  $-p\vec{u}_y$ , libres de se translater parallèlement à  $\vec{u}_y$ .
5. Proposer une application numérique dans le cas de molécules polaires occupant les nœuds d'un réseau cristallin. Commenter.

### 48. Mouvement d'une corde de violon (S. Gégout)

On analyse le mouvement d'une corde de violon de masse linéique  $\mu$  tendue sous une tension  $T$  entre deux points fixes d'abscisses  $x = 0$  et  $x = L$ . Observée à l'œil nu, elle semble osciller selon son mode propre fondamental. Une analyse plus précise, due à Helmholtz, fait apparaître une réalité plus complexe. La corde se présente sous la forme de deux segments séparés par un point anguleux  $A$  allant d'une extrémité à l'autre à vitesse  $V$ . Le déplacement  $y(x, t)$  des points de la corde s'écrit pour  $t \in [0, L/V]$

$$\begin{aligned} \text{pour } x \in [0, Vt], y(x, t) &= \beta x(L - Vt) \\ \text{pour } x \in [Vt, L], y(x, t) &= \beta(L - x)Vt \end{aligned}$$

où  $\beta \ll 1/L$ .

1. Représenter sur une seule figure la corde à divers instants. Vous pouvez utiliser Python<sup>9</sup>.
2. Vérifier qu'en dehors du point anguleux, les équations du problème sont satisfaites.
3. On considère le tronçon infinitésimal de corde de longueur  $\delta x$  qui, pendant  $\delta t$ , est traversé par le point anguleux. En lui appliquant le principe fondamental de la dynamique, montrer que  $V$  s'identifie à la célérité des ondes transversales dans la corde. Retrouver ce résultat en raisonnant sur la quantité de mouvement de la corde entière.
4. Déterminer le mouvement de la corde pour  $t \in [L/V, 2L/V]$  et compléter la figure de la question 1 par de nouvelles positions de la corde. Chercher le lieu des points successivement occupés par  $A$  et faire le lien avec la perception visuelle.
5. Expliciter le mouvement  $y(x_0, t)$  d'un point donné de la corde et le représenter  $y(x_0, t)$ . Expliquer comment l'archet, frottant la corde en se déplaçant à vitesse constante selon  $\vec{u}_y$ , peut produire un tel phénomène.

#### 49. Mesure de la vitesse du son dans une mousse (M. Gori-Grise)

Pour mesurer la vitesse du son dans une mousse liquide, J. Pierre *et al* ont développé un protocole original fondé sur l'étude d'un coefficient de réflexion<sup>10</sup>. On étudie ici le fondement théorique et un exemple d'application de cette méthode.

1. On considère deux milieux semi-infinis séparés par une interface plane que des ondes acoustiques sont susceptibles de franchir en incidence normale. Rappeler l'expression du coefficient de réflexion  $r$  pour l'onde de pression acoustique et donner son expression en fonction des impédances  $Z_0$  et  $Z_1$  des deux milieux.
2. Dans les questions qui suivent, l'interface occupe le plan d'équation  $x = 0$ . Au lieu d'être infini comme précédemment, le milieu d'impédance  $Z_1$  est borné à la région  $x \in ]0, d[$  avec  $d > 0$ , limité à l'abscisse  $d$  par une cloison parfaitement rigide. On définit alors l'impédance  $Z^*$  en  $x = 0^+$  par

$$p(0^+, t) = Z^* v(0^+, t) \quad .$$

On prendra garde à ne pas confondre  $Z^*$  avec l'impédance usuelle  $Z_1$  du matériau.

Quelle est l'expression du coefficient de réflexion pour une onde plane progressive harmonique provenant de  $x = -\infty$  et rencontrant l'interface en  $x = 0$  ?

3. Pour  $x \in [0, d]$ , le champ de pression acoustique est formé de deux OPPH voyageant en sens inverses :

$$p(x, t) = p_{10} e^{j(kx - \omega t)} + p_{20} e^{j(-kx - \omega t)} \quad .$$

Exprimer le champ de vitesse associé en utilisant  $Z_1$ .

4. En prenant en compte la présence de la cloison rigide, relier  $p_{10}$  à  $p_{20}$  puis en déduire l'expression suivante de  $Z^*$  en fonction de  $Z_1$ ,  $k$  et  $d$  :

$$Z^* = \frac{jZ_1}{\tan(kd)}$$

5. Dans les travaux de J. Pierre, le milieu 1 est une mousse produite en laboratoire d'épaisseur  $d = 1,93$  cm. Des montages à tubes de Kundt permettent la mesure de  $r$  d'où l'on peut déduire  $Z^*$ . En suivant cette voie, on a obtenu les résultats de la figure 20.

Interpréter la forme de la courbe et en déduire la célérité du son dans la mousse. On ne prendra pas en considération la courbe bleue (partie réelle).

#### 50. Gravité et acoustique (M. Gravier)

Dans la mise en équation usuelle des ondes acoustiques, on omet délibérément le champ de gravité. Montrer que sa prise en compte conduit à l'équation d'onde

$$\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{c^2} \vec{g} \cdot \vec{\nabla} p = 0 \quad .$$

9. On peut aussi consulter <http://www.phys.unsw.edu.au/jw/Bows.html>

10. Eur. Phys. J. E (2013) **36** : 113

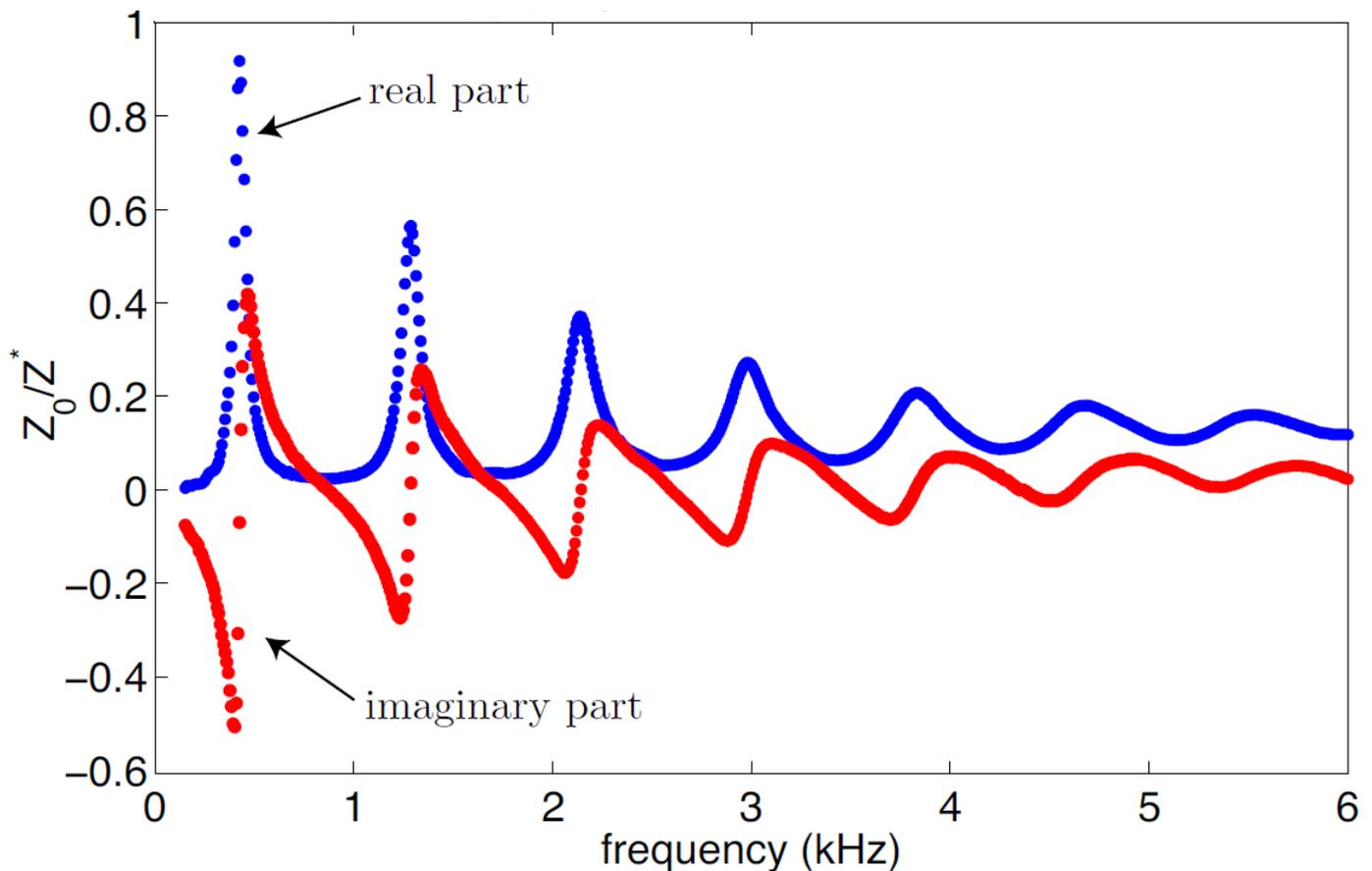


FIGURE 20 – Résultats de mesures d'impédance d'une couche de mousse de laboratoire.

Par une analyse d'ordre de grandeur, discuter l'importance du terme gravitaire selon la longueur d'onde.

### 51. Trois polariseurs (d'après CCP) (V. Gueudelot)

On utilise dans une manipulation d'optique une source de lumière naturelle placée devant un collimateur de manière à produire une onde plane, ainsi que trois polariseurs  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  que l'on peut disposer perpendiculairement au faisceau en les alignant les uns avec les autres. La lumière émergente est reçue sur un écran d'observation.

1. Pour l'instant on n'utilise que  $P_1$  et  $P_2$ . Comment faire pour que la lumière sur l'écran s'éteigne, sans éteindre la source bien entendu.

2. On introduit maintenant  $P_3$ . Est-il possible de faire réapparaître la lumière sur l'écran? Si oui, où et comment le disposer pour maximiser l'éclairement. Si non, pourquoi?

### 52. Pénétration du champ magnétique dans un métal (E. Hassnaoui)

On considère un métal semi-infini, de conductivité  $\gamma$ , occupant le demi-espace défini par  $x \geq 0$ . À partir de l'instant  $t = 0$ , on impose brutalement à sa surface un champ magnétique  $\vec{B}_0 = B_0 \vec{u}_y$  constant. On analyse l'évolution du champ qui s'ensuit à l'intérieur du métal. Il est nul pour  $t \leq 0$ , et de la forme  $\vec{B} = B(x, t) \vec{u}_y$  pour  $t \geq 0$ .

1. Expliquer sans calcul pourquoi des courants électriques se mettent à circuler dans le métal.
2. On néglige le courant de déplacement. Montrer que le champ magnétique obéit à une équation de diffusion et exprimer la diffusivité  $D$  en fonction de  $\mu_0$  et  $\gamma$ .
3. La résolution de cette équation doit permettre d'établir une relation entre les 5 grandeurs  $B$ ,  $B_0$ ,  $x$ ,  $D$  et  $t$ . Quel nombre  $k$  de dimensions *indépendantes* ces cinq grandeurs font-elles intervenir?
4. À partir de 5 grandeurs énumérées ci-dessus, former  $(n - k)$  nombres sans dimensions.
5. D'après le théorème de Vashy-Buckingham, il existe une fonction  $f$  telle que

$$\frac{B(x, t)}{B_0} = f\left(\frac{x}{2\sqrt{Dt}}\right) .$$

En utilisant ce changement de variables, montrer que

$$B(x, t) = B_0 \left( 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{Dt}} \right) \right) .$$

6. Représenter les variations spatiales de  $B$  à divers instants. Commenter en lien avec une loi qualitative régissant les phénomènes d'induction.

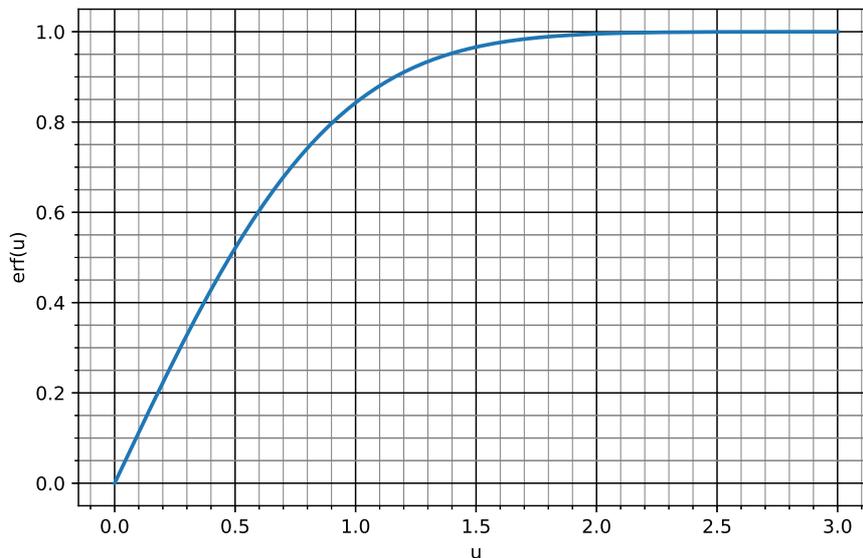
7. Dans le cuivre de conductivité  $\gamma = 6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$ , trouver au bout de combien de temps le champ vaut  $0,9B_0$  à une profondeur de 1 cm.

8. Déterminer la densité volumique de courant  $\vec{j}(x, t)$ . Représenter ses variations spatiales à différentes dates.

9. On considère la portion de plan définie par  $(x \geq 0, z = 0, y \in [0, \ell])$  (il s'agit d'un rectangle dont un côté présente la longueur  $\ell$  et dont l'autre côté tend vers l'infini). Exprimer l'intensité  $I(t)$  qui la traverse à un instant  $t > 0$ . Que remarque-t-on ?

### Annexe mathématique

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-q^2} dq$$



### 53. Dissipation et pression de radiation dans une réflexion métallique (P.-E. Huguin, M. Jacquemin)

On considère une onde électromagnétique de champ électrique complexe

$$\vec{E}_i = E_0 e^{i(kx - \omega t)} \vec{u}_y \quad \text{avec} \quad k = \omega/c \quad E_0 \in \mathbb{R}.$$

Elle voyage dans le vide dans la région de l'espace définie par  $(x < 0)$  et rencontre un conducteur occupant le demi-espace  $(x \geq 0)$ . On note  $\gamma$  la conductivité de ce matériau, supposée réelle et constante dans le domaine de fréquence étudié.

1. Dans l'approximation du bon conducteur, on montre que le champ transmis dans le métal est de la forme

$$\vec{E}_t(x, t) = \underline{E}_2 \vec{u}_y \exp [i(\underline{k}'x - \omega t)] \quad \text{avec} \quad \underline{k}' = \frac{1+i}{\delta} \quad \text{et} \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \delta \omega}} .$$

Rappeler ce que représente  $\delta$  et définir l'indice complexe du métal. L'exprimer en fonction de la grandeur sans dimension

$$u = \sqrt{\frac{\gamma}{2\epsilon_0 \omega}} = \frac{\gamma \delta}{2\epsilon_0 c} .$$

Que dire de  $u$  sous les hypothèses qui valident l'approximation du bon conducteur ?

2. Une onde réfléchie de la forme

$$\vec{E}_r = \underline{E}_1 \vec{u}_y e^{i(-kx - \omega t)}$$

est aussi présente dans le vide. Exprimer les champs magnétiques associés à chacune des trois ondes.

3. En exploitant la continuité des champs, déterminer  $\underline{E}_1$  et  $\underline{E}_2$  en fonction de  $E_0$  et d'autres grandeurs de l'énoncé.

4. On s'intéresse maintenant à l'aspect énergétique du phénomène. Exprimer l'intensité  $I_i$  de l'onde incidente et celle  $I_r$  de l'onde réfléchie.

5. Pour apprécier la pénétration de l'énergie dans le métal, nous n'allons pas utiliser le vecteur de Poynting de l'onde transmise mais nous concentrer sur la dissipation Joule. En effet, comme le métal s'étend jusqu'à l'infini, il n'évacue aucune énergie vers la droite et la puissance qu'il reçoit au travers de sa face d'équation  $x = 0$  s'y dissipe intégralement.

On délimite sur l'interface une zone d'aire  $S$ . Quelle puissance moyenne est dissipée dans une couche de métal d'épaisseur  $dx$  située à la profondeur  $x$  en face de  $S$ ? Quelle est la puissance moyenne dissipée dans tout le métal situé « sous » cette portion de l'interface? On l'exprimera en fonction de  $\gamma$ ,  $S$ ,  $\delta$ ,  $E_0$  et  $u$ .

6. Vérifier que les expressions précédentes sont compatibles avec l'idée générale de conservation de l'énergie.

7. Exprimer le coefficient de transmission en puissance en fonction de  $u$ . Quelle est sa valeur pour le cuivre ( $\gamma = 6.10^7 \text{ S.m}^{-1}$ ) à la fréquence de 1 GHz?

8. La réflexion d'une onde électromagnétique sur un métal présente aussi un aspect dynamique. Telle une balle rebondissant un plan, l'onde électromagnétique, en se réfléchissant, pousse la surface métallique. L'effet associé se nomme « pression de radiation » et possède de nombreuses conséquences. Des engins à voile solaire exploitant ce phénomène ont été envisagés.

On rappelle que le métal reste neutre aux échelles de temps considérées. Exprimer la force électromagnétique  $d\vec{F}$  s'exerçant sur la portion d'épaisseur  $dx$  et d'aire  $S$  envisagée plus haut.

9. Exprimer la force moyenne qui s'exerce sur tout le métal situé sous  $dS$ . Montrer que la pression associée s'exprime par

$$p_R = \frac{2I_i}{c} \frac{2u^2}{2u^2 + 2u + 1} .$$

10. Calculer numériquement  $p_R$  pour  $I_i = 1 \text{ kW.m}^{-2}$ .

11. En pratique, on peut utiliser  $p_R = 2I_i/c$ , ce qui revient à adopter le modèle du conducteur parfait. On souhaite interpréter ce résultat dans une description corpusculaire du rayonnement. Il est formé de photons d'énergie  $h\nu$  et de quantité de mouvement  $h\nu/c$ . On note  $N_{ph}$  leur nombre par unité de volume. Comment s'exprimer  $I_i$  dans ce modèle?

12. On néglige la contribution des très rares photons qui pénètrent dans le métal. En analysant la variation de quantité de mouvement des photons qui rencontrent le métal pendant  $dt$ , retrouver l'expression de la pression de radiation.

## Mécanique quantique

### 54. Couleurs des cyanines et boîtes quantiques (C. Khelil)

Les cyanines sont des cations possédant une succession liaisons conjuguées dans une chaîne d'atomes de carbones (figure 21). Chacun de ces atomes possède un électron  $\pi$  qui est délocalisé sur l'ensemble de la chaîne et bloqué à ses deux extrémités par l'atome d'azote. On se limite ici aux molécules pour lesquelles le nombre  $p$  d'atome C est impair et on note  $p = 2q + 1$ . La longueur de la chaîne vaut  $(p + 1)l$  où  $l = 0,14 \text{ nm}$  représente la distance interatomique. Ces molécules présentent une raie d'absorption dans la partie visible du spectre, ce qui leur confère des couleurs caractéristiques et expliquer qu'on les utilise fréquemment comme colorants. Pour  $p$  variant de 5 à 11, on a relevé la longueur d'onde  $\lambda$  correspondante et dressé le tableau ().

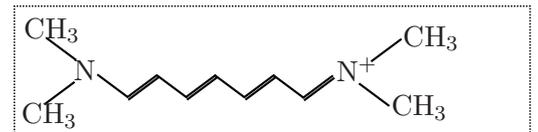


FIGURE 21 – Formule semi-développée d'une cyanine. Conformément à l'usage de la chimie organique, les atomes de carbones ne sont pas représentés mais on a indiqué les liaisons entre eux.

On traite les électrons  $\pi$  comme des particules indépendantes évoluant dans un puits de potentiel à une dimension. Comme dans un atome, leur répartition est régie par les règles de Pauli et de Hund et se fait de

$p$	5	7	9	11
$q$	2	3	4	5
$\lambda$ (nm)	416	519	625	735

TABLE 1 – Longueurs d'onde d'absorption des cyanines

manière à minimiser l'énergie totale. L'absorption de lumière correspond au passage de l'électron de plus haute énergie vers l'orbitale vacante d'énergie immédiatement supérieure.

Interpréter l'évolution de  $\lambda$  avec  $p$  et estimer, d'un point de vue théorique, les longueurs d'onde d'absorption. Commenter l'accord ou l'écart aux résultats expérimentaux.

### 55. Effet Aharonov-Bohm (K. Kraifi)

En 1959, D. Bohm et Y. Aharonov ont prévu un effet quantique surprenant, ensuite observé en laboratoire (Chambers 1960, Tonomura 1986) et parfois qualifié de « sixième merveille du monde quantique ». Nous en proposons ici une approche succincte.

1. On considère un système de deux fentes d'Young séparées d'une distance  $d$  et irradiées par un faisceau de neutrons. À la distance  $L \gg d$  on a placé un détecteur qui fournit, après un temps suffisamment long, le relevé de la figure 22. Interpréter qualitativement le phénomène. Que se passe-t-il si on enregistre l'évolution du signal au cours du temps, avec une résolution temporelle de l'ordre de la durée séparant l'arrivée de deux neutrons successifs sur les fentes ?

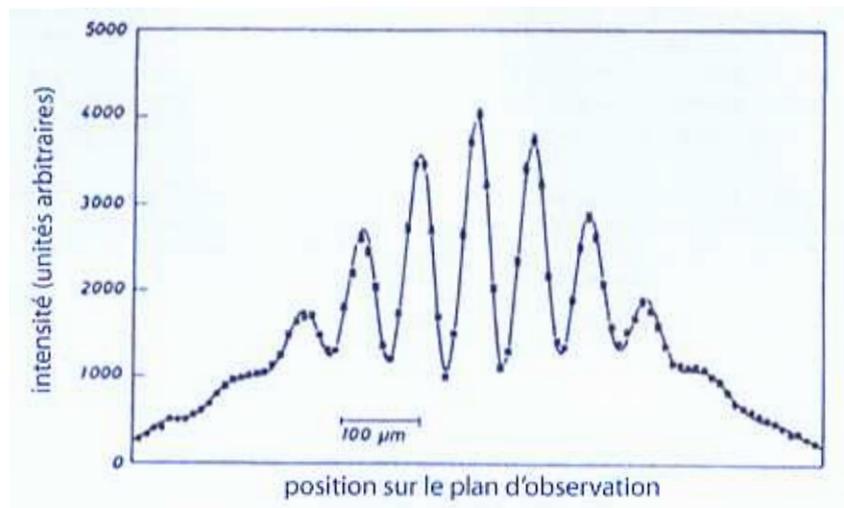


FIGURE 22 –

2. Les neutrons de masse  $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg ont une vitesse  $v = 200$  m.s<sup>-1</sup>. On donne encore  $L = 5$  m,  $d = 104$  μm. La largeur des fentes est de 22,5 μm. Interpréter quantitativement le phénomène.

3. La même expérience peut être réalisée avec des électrons (charge  $q = -e$ , masse  $m$ ). Le phénomène prévu par Aharonov et Bohm se manifeste lorsque qu'un solénoïde infini parcouru par un courant permanent est disposé derrière l'écran portant les fentes, parallèlement à celles-ci (voir figure 23). Décrire le champ magnétique qu'il produit et exprimer sa valeur  $B_0$  sur l'axe de révolution en fonction des grandeurs pertinentes.

4. Le rayon  $R$  du solénoïde est supposé suffisamment petit pour que les particules, en allant des fentes à l'écran, ne le rencontrent jamais. Néanmoins, sa présence se fait mystérieusement ressentir sous une forme que nous allons découvrir. Pour cela, on admet que les ondes de matière décrivant les électrons sont localement planes et que leur phase spatiale en un point  $M$  s'exprime par

$$\theta(M) = \int_{\mathcal{C}} \vec{k} \cdot d\vec{\ell}$$

où  $\mathcal{C}$  représente une trajectoire classique suivie par une particule entre la source  $S$  et un point quelconque de l'écran. Par la relation de de Broglie, le vecteur d'onde  $\vec{k}$  est relié l'impulsion généralisée  $\vec{p}$  qui s'exprime par

$$\vec{p} = m\vec{v} + \frac{qB_0R^2}{2r} \vec{u}_\theta \quad .$$

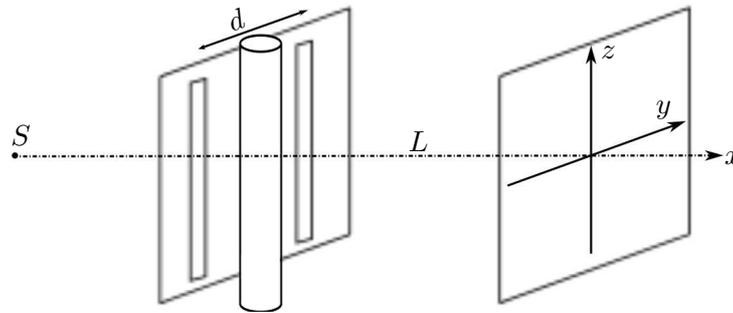


FIGURE 23 – Principe de l'effet Aharonov-Bohm

On notera que  $\vec{p}$  n'est pas la quantité de mouvement usuelle à cause du second terme, exprimé en coordonnées cylindriques relativement au solénoïde.

Représenter les deux trajectoires classiques permises entre la source et un point  $M$  de l'écran. En l'absence de champ magnétique, exprimer le déphasage obtenu en  $M$  et retrouver le résultat des questions 1 et 2.

5. En présence du champ magnétique, montrer que le déphasage entre les ondes issues de chacune des deux fentes est modifié de  $qB_0\pi R^2/\hbar$ . Que représente  $B_0\pi R^2$  ?

6. Quel effet observable l'augmentation du champ magnétique produit-elle ?

7. On nomme quantum de flux la valeur du flux magnétique produisant un déplacement égal à l'interfrange. Quelle est sa valeur  $\phi_0$  ?

## 56. Fusion thermonucléaire de protons (G. Launay)

On étudie le processus par lequel deux protons de masse  $m_p$  et de charge  $e$ , initialement très éloignés et se dirigeant l'un vers l'autre, peuvent fusionner pour donner un noyau de deutérium. Bien que ce phénomène se déroule dans l'espace, on simplifie le problème en le supposant unidimensionnel. On admet que le mouvement relatif des deux particules est équivalent à celui d'une particule unique de masse  $m = m_p/2$ , se déplaçant le long de la droite  $(O, \vec{u}_x)$ , l'abscisse  $x$  correspondant à la distance entre les deux protons.

1. On constate que les protons peuvent fusionner alors que leur répulsion électrostatique interdit en principe leur rapprochement en deçà d'une certaine distance limite. Quelle phénomène quantique explique ce comportement ?

2. En préliminaire, on considère une particule de masse  $m$  qui rencontre une marche de potentiel : l'énergie potentielle est nulle pour  $x < 0$  et vaut  $U_0$  pour  $x > 0$ . On recherche un état stationnaire d'énergie  $E < U_0$  et on note  $\Phi(x)$  la partie spatiale de sa fonction d'onde. Déterminer le coefficient  $t(x) = \Phi(x)/\Phi(0)$  (pour  $x \geq 0$ ).

3. Dans cette question, l'énergie potentielle est nulle pour  $x < 0$  et  $x > L$ , et vaut  $U_0 > E$  pour  $x \in ]0, L[$ . Si  $t(L)$  est « assez faible », on admet que le coefficient de transmission de la particule au travers de cette « barrière » est  $\Theta(E) = t(L)^2$ . Quelle est la définition de  $\Theta(E)$  ? À quelle condition  $t(L)$  est-il faible ?

4. Revenons au problème des deux protons en interaction séparés par la distance  $x$ . Donner l'expression de leur énergie d'interaction  $U(x)$  et représenter son graphique pour  $x > 0$ .

5. La particule équivalente de masse  $m$  est soumise à  $U(x)$  et possède une énergie  $E$ . Délimiter sur le graphique précédent l'intervalle  $[0, L]$  qui lui est classiquement interdit et donner l'expression de  $L$ .

6. La fusion des deux protons est réalisée lorsque la particule atteint la position  $x = 0$ . On admet que le coefficient de transmission  $\Theta(E)$  de ce processus se déduit de celui de la question 5 par la substitution suivante :

$$\sqrt{U_0 - E} L \longrightarrow \int_0^L \sqrt{U(x) - E} dx \quad .$$

Exprimer  $\Theta(E)$ , alors appelé « facteur de Gamov », sous la forme  $\Theta(E) = \exp\left(-(\sqrt{E/E_G})\right)$ . Donner l'expression et la valeur numérique de  $E_G$  (en joules puis en eV). On donne  $\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{u} - 1} du = \frac{\pi}{2}$ ,  $m = 8,35 \cdot 10^{-28}$  kg,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  F.m<sup>-1</sup>,  $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$  J.s,  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

7. Dans le contexte de la fusion thermonucléaire, l'énergie  $E$  des particules est liée à leur agitation thermique. Quelle est la valeur de  $\Theta$  dans le noyau du Soleil où la température est de 15 millions de kelvins ? On tiendra

compte du fait que le mouvement relatif des protons est unidimensionnel et que, par conséquence, seulement 1/3 de leur énergie cinétique intervient dans  $E$ .

En réalité, l'agitation thermique est associée à une distribution statistique des énergies des protons dont il faudrait tenir compte pour déterminer le taux de fusion.

### 57. Modèle de Kronig et Penney (1931) (E. Rieckenberg)

Dans un solide cristallin, les électrons sont soumis à un potentiel périodique créé par les ions du réseau. Cette *périodicité*, indépendamment de la forme précise du potentiel, est à l'origine d'une forme particulière du spectre des niveaux énergétiques appelée *structure de bande* : les énergies permises forment des intervalles disjoints, séparés par des intervalles appelés bandes interdites. Cette propriété a été expliquée (ou découverte ?) dès 1931 par Kronig et Penney grâce à un modèle simple dont des variantes sont encore étudiées aujourd'hui.

On se limite à une description unidimensionnelle et le potentiel périodique, s'étendant de  $-\infty$  à  $+\infty$ , est représenté sur la figure 24. On note  $d = a + b$  le pas du réseau.

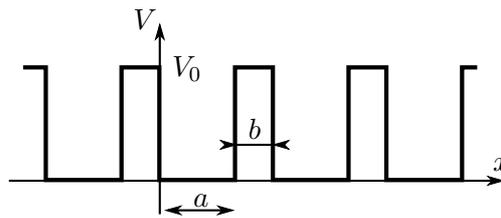


FIGURE 24 –

1. Citer une grandeur de la théorie quantique dont peut s'attendre à ce qu'elle soit d-périodique. En exploitant cette idée, on peut démontrer les propriétés suivantes<sup>11</sup>.

$$\forall x, \quad \Phi(x+d) = e^{i\theta} \Phi(x) \quad \frac{d\Phi}{dx}(x+d) = e^{i\theta} \frac{d\Phi}{dx}(x) \quad .$$

Le déphasage  $\theta$  peut prendre toute les valeurs dans  $[-\pi, \pi]$ .

2. On étudie des états stationnaires d'énergie  $E < V_0$ . Expliciter la fonction d'onde sur  $[0, a]$  et sur  $[a, d]$  en faisant intervenir 4 constantes.

3. Expliciter les conditions de passage pour la fonction d'onde puis, en utilisant la propriété fournie dans la question 1, en déduire un système de 4 relations linéaires satisfaites par les 4 constantes.

4. À quelle condition la résolution ce système (non demandée) peut-elle conduire à des fonctions d'onde non identiquement nulles ? Un long calcul permet d'exprimer cette condition sous la forme :

$$\cos \theta = \cosh(\rho b) \cos qa + \frac{(\rho^2 - q^2)}{2\rho q} \sin(qa) \sinh(\rho b) \quad \text{avec} \quad q = \sqrt{2mE}/\hbar \quad \rho = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar \quad (1)$$

5. Dans cette question on pose  $X = qa$ . Pour des valeurs numériques données de  $d$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $V_0$  et  $m$ , on peut exprimer  $\rho$  en fonction de  $X$  puis tracer le graphe de la fonction

$$g : X \rightarrow \cosh(\rho b) \cos X + \frac{(\rho^2 - q^2)}{2\rho q} \sin(X) \sinh(\rho b) \quad .$$

Le résultat est représenté dans la partie supérieure de la figure 5..

Comment l'intervalle de variations de  $X$  est-il choisi ? Quelles sont les énergies permises ? Conclure en lien avec l'introduction du problème.

11. Il s'agit de conséquences d'un théorème dû à Félix Bloch (1928)

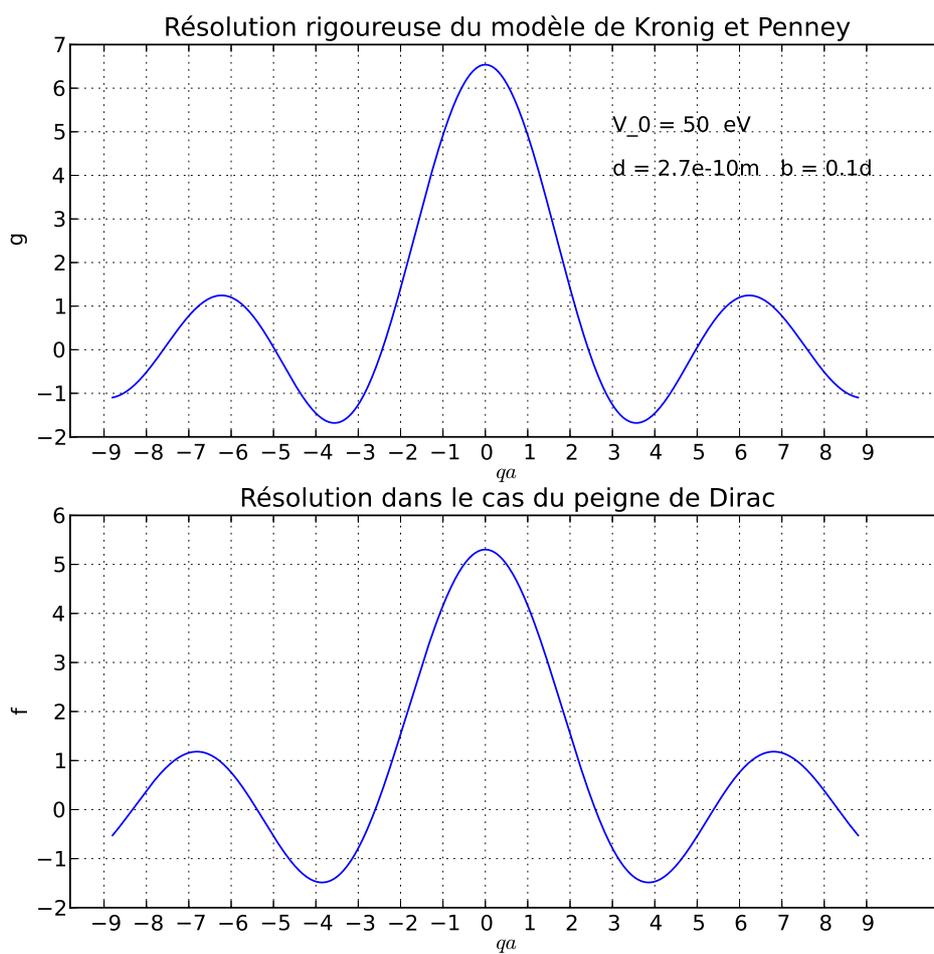


FIGURE 25 – Exemple de résolution du modèle de Kronig et Penney

---

## Optique

---

### 58. Étude d'une lunette astronomique (Centrale-Supélec) (L. Magron-Mathis)

Un observateur accommodant à l'infini observe des objets situés à l'infini à travers une lunette astronomique.

1. Décrire le montage d'une lunette astronomique composée de l'association de deux lentilles minces convergentes. La lentille constituant l'objectif a une focale  $f'_{\text{obj}}$  et celle constituant l'oculaire une focale  $f'_{\text{oc}}$ . Donner une expression du grossissement et du grandissement (on remarquera que le grandissement ne dépend pas de la position de l'objet). Quelle relation simple relie ces deux grandeurs ?

2. La lunette considérée ici est constituée par l'association d'une lentille convergente  $L_{\text{obj}}$  de focale  $f'_{\text{obj}} = 9a$  et d'un oculaire. Cet oculaire est lui-même formé de deux lentilles minces convergentes de même distance  $f'_1 = 3a$ , éloignées l'une de l'autre d'une distance  $2a$ .

Pour cet oculaire, déterminer la position du foyer image  $F'$  et du foyer objet  $F$  en exprimant  $\overline{O_2F'}$  et  $\overline{O_1F}$ . Déterminer également la position des points conjugués  $H$  et  $H'$  pour lesquels le grandissement transversal vaut 1. Enfin, calculer les distances focales définies par

$$f' = \overline{H'F'} \quad \text{et} \quad f = \overline{HF} \quad .$$

Après avoir effectué les calculs, vous pourrez utiliser le logiciel optgeo pour observer le cheminement des rayons dans cet oculaire et vérifier vos résultats. Le fichier à utiliser s'intitule `oculaire_Centrale.opt` et a été produit avec  $a = 50$  mm.

3. Comment faut-il placer cet oculaire pour que l'ensemble de la lunette soit afocal et constitue donc une lunette astronomique ? Donner la distance séparant la lentille objectif de  $L_1$ .

On utilisera le fichier de simulation `lunette_Centrale_avec_optgeo.opt` et ouvrir l'onglet des commentaires ( $a = 40$  mm). En déplaçant ensemble les deux lentilles constituant l'oculaire, vérifier la position de  $L_1$ .

4. Si l'objet à l'infini est vu à l'oeil nu sous un angle  $\alpha$ , sous quel angle apparaît-il à travers l'appareil ?

5. Le rayon  $R$  de la monture de l'objectif de la lunette complète est  $R = 2,5$  cm. On suppose que le faisceau qui atteint le système est parallèle et de rayon supérieur à  $R$ . Quel est alors le rayon du faisceau sortant ? Dans l'hypothèse d'un faisceau incident divergent, où faut-il placer l'oeil pour observer avec un maximum d'intensité ?

---

### 59. Enregistrement d'un interférogramme avec un détecteur étendu (V. Moniot)

L'interféromètre de Michelson est utilisé en lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  dans la configuration lame à faces parallèles d'épaisseur  $e$ .

- Quelle est la nature des franges observées ? Préciser par un schéma le dispositif expérimental correspondant.
- Au foyer de la lentille d'observation, on place un détecteur ponctuel délivrant une tension électrique proportionnelle à la puissance lumineuse qui lui parvient. Un moteur permet de translater l'un des deux miroirs à vitesse constante. Représenter le graphe montrant les variations temporelles du signal fourni par le capteur.
- Comment ce graphe doit-il être modifié pour tenir compte de la longueur de cohérence finie de la source ?
- On revient au cas d'une source de lumière strictement monochromatique. En réalité, le détecteur n'est pas ponctuel. Il s'agit d'une cellule en forme de disque de rayon  $R$ , centrée sur le foyer  $F'$  de la lentille. Quelle plage d'angles d'incidence  $i$  ce capteur reçoit-il ? On notera  $i_{\text{max}}$  la valeur maximale.
- Déterminer à un facteur près le signal fourni par le capteur et représenter ses variations en fonction de  $e$ . On utilisera la propriété suivante : la région du plan focal définie par les angles d'incidence de l'intervalle  $[i, i + di]$  présente une aire  $dS \simeq 2\pi f'^2 \sin i \, di$ . L'expression à trouver est de la forme

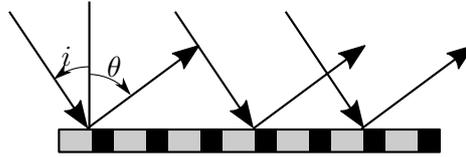
$$V = K (1 + \gamma \cos(4\pi e/\lambda))$$

où  $\gamma$  s'exprime en fonction de  $e$ ,  $\lambda$  et  $\Omega = 2\pi(1 - \cos i_{\text{max}})$ .

- À quelle condition l'extension spatiale du capteur peut-elle être négligée ? Retrouver ce résultat en raisonnant sur une variation de l'ordre d'interférence.
- Commenter le résultat des questions précédentes en lien avec la question 3.

### 60. Monochromateur à réseau (A. Pierlot)

1. Un réseau par réflexion fonctionne de manière analogue à un réseau par transmission, si ce n'est qu'on y exploite la lumière réfléchi au lieu de la lumière transmise. En adaptant le raisonnement vu pour les réseaux par transmission, démontrer la relation entre l'angle d'incidence  $i$  et l'angle d'émergence  $\theta$  pour l'ordre  $p$ . On notera  $n$  la linéature et on prendra garde à l'orientation des angles, positifs dans le sens trigonométriques.



On considère dans la suite un réseau plan utilisé en réflexion, comportant  $n$  traits par unité de longueur, parallèles à l'axe  $z$  (figure 26). L'angle entre la normale au réseau et l'axe  $x$  est réglable et noté  $\alpha$ . Le faisceau incident et la lumière diffractée sont caractérisés par les angles  $\beta$  et  $\beta'$ .

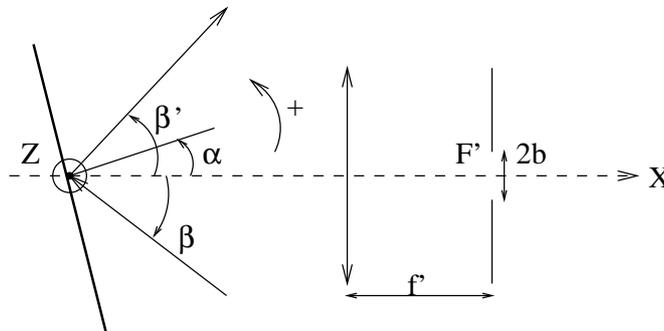


FIGURE 26 – Monochromateur à réseau

2. On impose que dans l'ordre 2, la raie  $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$  soit diffractée dans la direction  $\beta' = 0$  lorsque  $\alpha = 0$ . Quelle valeur faut-il donner à  $\beta$ ? Cette valeur reste fixée dans la suite.
3. Dans cette question, on maintient  $\alpha = 0$ . La lumière diffractée par le réseau émerge de l'appareil par une fente de largeur  $2b$  placée dans le plan focal d'une lentille d'axe  $Ox$ . Montrer qu'on sélectionne ainsi une fine bande spectrale centrée sur  $\lambda_0$ , dont on calculera la largeur  $\delta\lambda$ .
4. Entre quelles valeurs limites faut-il faire varier  $\alpha$  pour sélectionner, dans la direction  $\beta' = 0$ , tout le spectre visible  $\lambda \in [400 \text{ nm}, 800 \text{ nm}]$ .

Valeurs numériques :  $n = 500 \text{ mm}^{-1}$ ,  $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$ ,  $f' = 10 \text{ cm}$ ,  $b = 1 \text{ mm}$ .