Mathématiques — préparation à l'oral — indications

Correctif

Dans les exemplaires papier que je distribue, il y a des fautes de frappes, qui sont corrigées dans la version en ligne.

Exercice 99. La bonne intégrale est $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}-1}{t}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 141. Il faut remplacer $\zeta(k)$ par $\zeta(k+1)$. La bonne formule est $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^k$.

Indications

Exercice 5. Pour l'analyse, écrire P sous la forme $a\mathrm{X}^d + \mathrm{Q}$ avec $\deg(\mathrm{Q}) < d$.

Exercice 6. Chapitre 1, exercice 4 (et peut-être 7, d'ailleurs).

Exercice 17. Pour conclure, utiliser le résultat de 2.2 dans l'exercice 31.

Exercice 23. Factoriser par A et remarquer qu'on peut se ramener à la recherche d'un polynôme caractéristique.

Exercice 32. Sous l'hypothèse $\varphi(h) = \lambda h$, exprimer $\varphi(h^k)$.

Exercice 40. Pour la dernière question, je renvoie au devoir en temps libre 3.

Exercice 47. On pourra s'inspirer de ce qui a été fait pour les matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 56. Pour les deux dernières questions, repérer une somme géométrique finie.

Exercice 59. Commencer par l'exercice 70.

Exercice 63. Prendre r dans $]0,1[$ et appliquer le théorème des bornes atteintes sur le segment $[0,r]$.

Exercice 68. Commencer par montrer que l'équation possède une unique solution puis raisonner avec des arguments de nombres complexes.

Exercice 79, question 4. Poser $g(a) = \displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ et remarquer que le raisonnement de la question 3 permet d'exprimer $g(a)$ pour tout $a > 0$.

Remarquer que g est monotone et raisonner enfin par l'absurde en supposant que sa limite en 0 est finie.

Exercice 91. Chapitre 4, paragraphe de méthode 4.5.

Exercice 93, question 2. Méthode des rectangles.

Exercice 94. Pour le calcul, je renvoie de nouveau à l'exercice 4 du chapitre 1.

Exercice 100. Définir la fonction vectorielle $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et remarquer que le système s'écrit $\mathrm{X}'' = \mathrm{AX}$ pour une certaine matrice A.

Utiliser alors la diagonalisation de A pour transformer le problème.

Exercice 107. Interpréter l'hypothèse en termes de dérivée directionnelle.

Exercice 108. Introduire la fonction $\varphi : t \mapsto f((1-t)x + ty)$.

Exercice 122. Étant donné une racine z, écrire l'équation sous la forme $z^n(z-a) = 1 - az$.

Exercice 125. Utiliser la version géométrique du théorème du rang.

Exercice 126. Exercice 36 du chapitre 8.

Exercice 127. Exercice 20 du chapitre 9.

Exercice 134. Poser $\ell = \inf \left\{ \dfrac{a_n}{n} \ ;\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Fixer ensuite $\varepsilon > 0$ et expliquer qu'on peut choisir $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{a_p}{p} \leqslant \ell + \varepsilon$.

Pour un entier n quelconque, effectuer la division euclidienne de n par p et trouver un moyen de progresser.

Exercice 135. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange pour $|f(x+h) - f(x) - hf'(x)|$.

En déduire que f' est bornée sur $[a, +\infty[$ et trouver un majorant (indépendant de h) de $||f'||_{\infty,[a,+\imath nfty[}$.

Exercice 136, question b. Il s'agit de montrer que $\dfrac{1}{n}(u_n)^{-1/\alpha}$ tend vers 0.

Trouver la limite de $(u_n)^{-1/\alpha} - (u_{n-1})^{-1/\alpha}$ puis conclure avec le *théorème de Césàro.*

Certes ce théorème n'est pas au programme mais arrêtez de faire du mauvais esprit et allez plutôt consulter le premier devoir en temps libre de 2021-2022.

Exercice 138. *Première méthode.* Linéariser $\sin^2(n)$ et revoir l'exercice 18 du chapitre 3.

Deuxième méthode. Constater que $\sin^2(n)$ est *souvent* minoré par une constante bien choisie.

Exercice 139. Inégalité de Hölder.

Exercice 141. Il s'agit de calculer l'intégrale par une intégration terme à terme et d'exprimer la somme de série en utilisant le théorème de Fubini.

Exercice 146. Le quotient $\dfrac{x-y}{1+xy}$ doit évoquer une formule de trigo.