Mardi 21 mai 2024

Ex 1. Analyse. Soit (x,y,z) une solution.

Il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = e^{ia}$, $y = e^{ib}$, $z = e^{-i(a+b)}$.

$$x+y+z = e^{ia} + e^{ib} + e^{-i(a+b)} = e^{i\frac{a+b}{2}} 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + e^{-i(a+b)}.$$

$$\begin{cases} 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) + \cos(a+b) = 1 \\ 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) - \underbrace{\sin(a+b)}_{2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)} = 0 \end{cases}$$

donc
$$\begin{cases} \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0 \\ \text{ou} \\ \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) - \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0. \end{cases}$$

1er cas : $\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $\frac{a+b}{2} = k\pi$.

$\cos(a+b) = \cos(2k\pi) = 1$ donc $\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) = 0$.

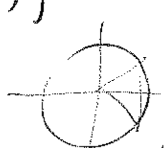
$\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) = (-1)^k$ Il existe $l \in \mathbb{Z}$ tq $\frac{a-b}{2} = \frac{\pi}{2} + l\pi$.

$b = -\frac{\pi}{2} + (k-l)\pi$, $a+b = 2k\pi$.

$a = \frac{\pi}{2} + (k+l)\pi$, $z = 1$.

$x = i(-1)^{k+l}$, $y = -i(-1)^{k+l}$,

Ainsi, $(x,y,z) \in \{(i,-i,1), (-i,i,1)\}$.



2e cas : $\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) - \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$.

Cas 2.1 : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $\frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} + 2k\pi$. Alors $b = -2k\pi$.
$y = 1$. Il reste $xz = 1$ et $x+z = 0$ donc $x^2 = -1$ donc $(x,z) = (i,-i)$ ou $(-i,i)$.

Cas 2.2 : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tq $-\frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2} + 2k\pi$. Alors $a = -2k\pi$.
$x = 1$. Il reste $y+z = 0$ et $yz = 1$ donc $y^2 = 1$ donc $(y,z) = (i,-i)$ ou $(-i,i)$.

Synthèse. Tout marche.

Ex2. $M = A \iff z = 1$ $\qquad A = N \iff z = 0.$

$M = N \iff z^2 - z + 1 = 0 \iff z \in \{e^{i\pi/3}, e^{-i\pi/3}\}.$

Si $z \in \{0, 1, e^{\pm i\pi/3}\}$, A, M, N sont alignés.

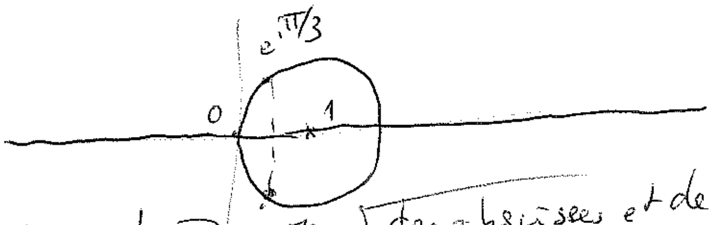
Hyp. $z \notin \{0, 1, e^{\pm i\pi/3}\}$, de sorte que A, M, N sont distincts.

$$\text{alignés} \iff \frac{z^2}{z-1} \in \mathbb{R} \iff z^2(\bar{z}-1) \in \mathbb{R} \iff z|z|^2 - z^2 \in \mathbb{R}.$$

$z = a+ib.$ $\qquad z|z|^2 - z^2 = (a+ib)(a^2+b^2) - (a^2-b^2+2iab).$

$$\text{alignés} \iff b(a^2+b^2) - 2ab = 0 \iff \begin{cases} b = 0 \\ \text{ou} \\ a^2+b^2-2a = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ \text{ou} \\ (a-1)^2+b^2 = 1. \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ |z-1| = 1. \end{cases}$$



L'ens des sol est la réunion de l'axe des abscisses et de ce cercle.

Ex7. Non. Les irr sont les poly de deg 1 et ceux de deg 2 avec $\Delta < 0$.

$$X^4 + 4 = (X^2 - 2i)(X^2 + 2i). \qquad 2i = (1+i)^2, \quad -2i = (1-i)^2$$

$$X^4 + 4 = (X-(1+i))(X+(1+i))(X-(1-i))(X+(1-i))$$

$$(X-(1+i))(X-(1-i)) = (X-1)^2 + 1 = X^2 - 2X + 2$$

$$(X+(1+i))(X+(1-i)) = (X+1)^2 + 1 = X^2 + 2X + 2.$$

$$\boxed{X^4 + 4 = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + 2X + 2).}$$

Ex3. Analyse. Soit P une éventuelle solution.

$$\begin{cases} R(j)=0 \\ R(j^2)=0 \\ \deg(R)\leq 2 \end{cases}$$ donc il existe $a\in\mathbb{C}$ tq $R=a(X-j)(X-j^2)$.

$$R = a(X^2+X+1).$$

$P' = a(X^2+X+1)+X$ donc il existe $b\in\mathbb{C}$ tq

$$P = a\left(\frac{X^3}{3}+\frac{X^2}{2}+X\right)+\frac{X^2}{2}+b.$$

or $P(j)=j^2$

$P(j^2)=j$.

$$P(j) = a\left(\frac{1}{3}+\frac{j^2}{2}+j\right)+\frac{j^2}{2}+b$$

$$P(j^2) = a\left(\frac{1}{3}+\frac{j}{2}+j^2\right)+\frac{j}{2}+b.$$

$j=-1-j^2$ donc

$$P(j) = j^2\left[-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left(\cancel{a}-\frac{2}{3}a+b\right)$$

$$P(j^2) = j\left[-\frac{a}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left(-\frac{2}{3}a+b\right).$$

$\begin{pmatrix} j^2 & 1 \\ j & 1 \end{pmatrix}$ est inversible. $\begin{cases} -\frac{a}{2}+\frac{1}{2}=1 \\ -\frac{2}{3}a+b=0 \end{cases}$

donc $a=-1$ et $b=-2/3$. Finalement, $P = -\left(\frac{X^3}{3}+\frac{X^2}{2}+X\right)+\frac{X^2}{2}-\frac{2}{3}$

$$= -\frac{X^3}{3}-X-\frac{2}{3}.$$

Synthèse. On choisit P ainsi.

$P(j) = -\frac{1}{3}-j-\frac{2}{3} = -j-1 = j^2$.

etc.

Ex4. $P\times(X-1) = X^n-1$ donc $\boxed{P=\sum_{k=0}^{n-1}X^k}$.

$$\sum_{\omega\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}}\frac{1}{z-\omega} = \frac{P'(z)}{P(z)}$$ donc $$S=\frac{P'(1)}{P(1)}.$$

$$P' = \sum_{k=1}^{n-1}kX^{k-1}.$$

$P(1)=n$.

$$P'(1) = \sum_{k=1}^{n-1}k = \frac{(n-1)n}{2}.$$

$$\boxed{S=\frac{n-1}{2}}.$$

Ex 5. Analyse. Soit P une sol non nulle.

$P = aX^d + \underbrace{Q}_{\deg < d}$.

$P(X^2) = aX^{2d} + Q(X^2)$

$P(X)^2 = a^2X^{2d} + \underbrace{2aX^dQ(X) + Q(X)^2}_{\deg < 2d}$.

$\begin{cases} a = a^2 \\ a \neq 0 \end{cases}$ donc $a = 1$. Il reste $\underbrace{Q(X^2) - Q(X)^2}_{\deg \leq 2q} = \underbrace{2aX^dQ(X)}_{\deg = d+q > 2q}$.

si $Q \neq 0$, on note $q = \deg(Q)$ et

impossible donc $Q = 0$.

Ainsi, $P = X^d$.

Synthèse. Les X^d et 0 sont solutions.

Ex6. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$P(x) = 0 \iff \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0 \\ -x^2 + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - 2x^2 + 3x - 2 = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \iff x = 1$.

1 est sol en effet mais pas -1

$P = (X^3 - 2X^2 + 3X - 2) + i(-X^2 + 1) = (X-1)(X^2 - (1+i)X + (2-i))$.

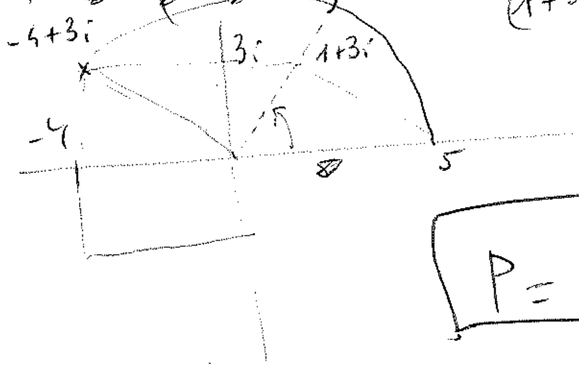
$= (X-1)(X^2 - X + 2) - i(X-1)(X+1)$ $\cancel{= (X-1)\left(X - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}\right)\left(X - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{7}}{2}\right)}$

$\cancel{X^2 - X + 2 = \left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = \left(X - \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{7}}{2}\right)}$

$\Delta = (1+i)^2 - 4(2-i) = -8 + 6i = 2 \times (-4 + 3i)$

les racines de $X^2 - (1+i)X + (2-i)$

$(1+3i)^2 = -8 + 6i$. sont $\dfrac{1+i \pm (1+3i)}{2}$, c'est-à-dire $1 + 2i$ et $-i$.



$$\boxed{P = (X-1)(X+i)(X-1-2i)}$$

Mercredi 22 mai 2024

Ex 61. $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)-x=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x^2}{x}\right)$ | $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right)-1 = \frac{x^2-2x+1}{2x} \geq 0.$

si $u_0=1$, alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=1$.

~~si~~ $\forall n \geq 1$, $u_n \geq 1$.

$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{2}\,\frac{1-u_n^2}{u_n}\leq 0$. Décr minorée par 1 donc conv.

$\frac{1}{2}\left(l+\frac{1}{l}\right)=l$ donc $l=1$.

Ex 65. On suppose que oui. Posons $f(x)=P(x)-Q(x)e^x$.

Th de Rolle : f' aussi a une infinité de zéros.

Idem pour f'' etc. Posons $d=\deg(P)$.

$$f^{(d+1)}(x)=\Big(\underbrace{-\sum_{k=0}^{d+1}\binom{d+1}{k}Q^{(k)}(x)}_{\text{noté } R}\Big)e^x.$$

R a une inf de racines donc $R=0$.

$\deg(R)=\deg(Q)$. impossible.

Donc $Q=0$

Ex 69. $g : x \longmapsto f(x)-x$.

$\int_0^1 g=0$. g est cont. Si f n'a pas de pt fixes, g est de signe constant strict donc $\int_0^1 g>0$ ou $\int_0^1 g<0$.

Impossible.

Ex 56.

a- $\begin{cases} P_n \in \mathcal{C}^0(\underbrace{[0,+\infty[}_{\text{intervalle}}, \mathbb{R}) \\ P_n(0) = -1 < 0 \\ P_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \end{cases}$ Th. val int : P_n a au moins une racine dans $]0,+\infty[$.

P_n est str cr sur $[0,+\infty[$ donc unicité.

b. $P_n(x_{n+1}) = P_{n+1}(x_{n+1}) - x_{n+1}^{n+1} = -x_{n+1}^{n+1} < 0 = P_n(x_n)$

donc $\boxed{x_{n+1} < x_n}$. $x_n \geq 0$) décr minorée donc conv. ~~$x_1 = 1$~~

$x_1 = 1$ donc $x_n < 1$ si $n \geq 2$. $x_n \times \dfrac{1-x_n^n}{1-x_n} = 1$.

si $n \geq 2$, $0 \leq x_n \leq x_2$ donc $0 \leq x_n^n \leq x_2^n$ or $x_2 < 1$

donc $x_n^n \longrightarrow 0$. $\dfrac{l}{1-l} = 1$ donc $l = 1/2$.

c. $x_n - x_n^{n+1} = 1 - x_n$ donc $1 - 2x_n = -x_n^{n+1}$.

$x_n - \dfrac{1}{2} = +\dfrac{1}{2} x_n^{n+1}$. $x_n^{n+1} = \exp((n+1)\ln(x_n))$.

$x_n = \dfrac{1}{2} + O(x_2^n)$ donc $\ln(x_n) = -\ln(2) + O(x_2^n)$

$(n+1)\ln(x_n) = -\ln(2)(n+1) + \underbrace{O((n+1)x_2^n)}_{\text{tend vers } 0} = -\ln(2)(n+1) + o(1)$

donc $x_n^{n+1} \sim \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ et $\boxed{x_n - \dfrac{1}{2} \sim \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}}$.

Ex 58. $\cos(n+1) = \cos(n)\cos(1) - \sin(n)\sin(1)$
$\sin(n+1) = \sin(n)\cos(1) + \cos(n)\sin(1)$.

Si $\cos(n) \to a$, alors $\sin(n) \longrightarrow a \times \dfrac{\cos(1)-1}{\sin(1)}$

Si $\sin(n) \to b$, alors $\cos(n) \longrightarrow b \times \dfrac{1-\cos(1)}{\sin(1)}$.

Ou bien elles div toutes deux, ou bien elles conv toutes deux.

Si elles conv, $\begin{cases} b = a \times (<0) \\ a = b \times (>0) \end{cases}$ donc $a = 0$, $b = 0$, donc $e^{in} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais c'est imp puisque $|e^{in}| = 1$.

Ex 66. a. $\forall x \in \mathbb{R}, \; f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n-1}}{n!}$ DSE.

b. $\forall x \in \mathbb{R}, \; f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n-1)\, x^{2n-2}}{n!} \geq 1$.

f est str cr
f est cont
$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$
$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$

bij. f' ne s'annule pas donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^\infty$ aussi.

c. f est imp donc f^{-1} aussi.

$f^{-1}(y) = a y + b y^3 + c y^5 + o(y^5)$.

$f(x) = x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)$.

$f(x)^3 = x^3\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^3 = x^3\left(1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right)$

$$f^{-1}(f(x)) = a\left(x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{6} + o(x^5)\right) + b\left(x^3 + \frac{3}{2}x^5 + o(x^5)\right) + c\left(x^5 + o(x^5)\right)$$

$$= a x + \left(\frac{a}{2} + b\right)x^3 + \left(\frac{a}{6} + \frac{3}{2}b + c\right)x^5 + o(x^5).$$

Or $f^{-1}(f(x)) = x$. Unicité DL.

$a = 1$ $\quad b = -a/2 = -1/2$

$$c = -\frac{a}{6} - \frac{3}{2}b = -\frac{1}{6} + \frac{3}{4} = \frac{7}{12}.$$

$$\boxed{f^{-1}(y) = y - \frac{1}{2}y^3 + \frac{7}{12}y^5 + o(y^5)}$$

Jeudi 23 mai 2024

Ex 10. On complète a en une base $(a, g_1, \dots, g_s)$ de G.

1^{er} cas : $a \neq 0$.

$\mathrm{Vect}(a+b_1, \dots, a+b_n, a, g_1, \dots, g_s) = \mathrm{Vect}(b_1, \dots, b_n, a, g_1, \dots, g_s)$

$= F + G = E$ et cette famille a pour longueur $\dim(E)$

donc c'est une base de E donc $F_a \oplus G = E$.

2^e cas : $a = 0$. $F_a = F$ donc voilà.

Ex 15. ① $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$

donc $\mathrm{rg}(u+v) \leq \dim(\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$.

② $u \circ v = 0$ donc $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u)$ donc $\mathrm{rg}(v) \leq n - \mathrm{rg}(u)$

donc $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \leq n$.

Or $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \geq \mathrm{rg}(u+v) = n$ donc $\mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) = n$.

$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Ker}(u) \\ \text{égalité dim} \end{array} \right.$ donc $\mathrm{Im}(v) = \mathrm{Ker}(u)$.

Ex 19. ① $(AB)^2 = AB$ (calcul)

② $(BA)^3 = B(AB)^2 A = B(AB)A = (BA)^2$.

$\mathrm{Sp}(BA) \subset \{0, 1\}$. $\mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(AB) = 2$.

Or $\mathrm{tr}(BA) = 1 \times \mathrm{mult}(1, BA)$ donc $\mathrm{mult}(1, BA) = 2$

donc $\chi_{BA} = (X-1)^2$ donc BA est inv.

Il reste $BA = I_2$.

Ex 17.

a. Hyp : Il existe $\phi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K}) \setminus \{0\}$ tq $F = \ker(\phi)$. Hyperplan.

$\dim(F) = \dim(E) - rg(\phi) = \dim(E) - 1$.

Hyp. $\dim(F) = n-1$. Soit $a \in E \setminus F$.

Alors $E = F \oplus Vect(a)$.

$$f : \mathbb{K} \longrightarrow Vect(a) \quad \lambda \longmapsto \lambda a$$ est un isom.

Notons p la proj sur $Vect(a)$ parall à F, de sorte ~~$p(x) = 0 \Leftrightarrow p(\ldots)$~~

que $F = \ker(p)$.

~~$p \circ f^{-1}$~~ $\quad f^{-1} \circ p \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. $\quad f^{-1}(p(x)) = 0$

$(f^{-1} \circ p)(a) = 1 \quad \Leftrightarrow p(x) = 0 \Leftrightarrow x \in F$

donc $F = \ker(f^{-1} \circ p)$.

b. On note $\varphi_A : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $M \longmapsto tr(AM)$

$$M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(M_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$$
$$A \longmapsto \varphi_A$$

est un isomorphisme. F est le noyau d'une certaine forme lin sur $M_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire de φ_A pour un certain A. (à creuser)

Ex 24. Notons $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. $U^2 = 2U$

Il y a déjà tous les couples $\left(\lambda U, \frac{1}{\lambda} I_2\right)$ et $\left(\frac{1}{\lambda} I_2, \lambda U\right)$ et $\left(\lambda U, \frac{1}{2\lambda} U\right)$.

Analyse. Soit (A, B) une sol. $\begin{matrix} Ker(B) \\ Ker(A) \end{matrix} \subset Ker(U) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

$Im(U) = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $Im(U) \subset \begin{matrix} Im(A) \\ Im(B) \end{matrix}$.

1er cas : A est inv. Alors $rg(B) = 1$ donc $Im(B) = Im(U)$.

$Ker(B) = Ker(U)$ donc $\lambda = \mu$.

$B = \begin{bmatrix} \lambda & \mu \\ \lambda & \mu \end{bmatrix}$. $B = \lambda U$

$AB = BA$ donc $Ker(B)$ et $Im(B)$ sont stables par A. $A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\alpha \neq 0$

$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. $\beta \neq 0$.

$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{\beta}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta \end{bmatrix} = \frac{\alpha-\beta}{2} U + \beta I_2.$$

$$AB = \lambda\left(\frac{\alpha-\beta}{2} U^2 + \beta U\right) = \lambda\alpha U$$ donc $\lambda\alpha = 1$ donc $\alpha = 1/\lambda$.

donc $\boxed{A = \frac{1}{2\lambda} U + \beta\left(I_2 - \frac{1}{2} U\right)}$. !

2e cas : A et B ne sont pas inv. Par le même raisonnement,

$A = \lambda U$, $B = \mu U$ et $\lambda\mu = \frac{1}{2}$.

Synthèse. À évoquer au minimum.

Ex 26. $\Delta(a,x,y,z) = \begin{vmatrix} a & x & \cdots & x \\ y & z & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ y & 0 & & z \end{vmatrix}.$

$$\Delta(a,x,y,0) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \geq 3 \\ az - xy & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

Cas où $z \neq 0$.

$$\Delta(a,x,y,z) \underset{L_1 \leftarrow L_1 - \frac{x}{z}\sum_{k=2}^{n} L_k}{=\!=} \begin{vmatrix} a-(n-1)\frac{xy}{z} & 0 & \cdots & 0 \\ y & z & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ y & 0 & & z \end{vmatrix}$$

$$= \left(a - (n-1)\frac{xy}{z}\right) \times z^{n-1} = a z^{n-1} - (n-1)xy\, z^{n-2}.$$

Cohérent avec les expressions précédentes.

Ex 27. Posons $C = \sum_{k=1}^{n} A_k$.

$$B = \left[C - A_1 \mid C - A_2 \mid \cdots \mid C - A_n \right].$$

$$\det(B) \underset{C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n}{=\!=} \det\left[(n-1)C \mid C - A_2 \mid \cdots \mid C - A_n\right]$$

$$= (n-1)\det\left(C \mid C - A_2 \mid \cdots \mid C - A_n\right)$$

$$= (n-1)\det\left(C \mid -A_2 \mid \cdots \mid -A_n\right)$$

$$= (n-1)\det\left(A_1 \mid -A_2 \mid \cdots \mid -A_n\right) = (-1)^{n-1}(n-1)\det(A)$$

Samedi 25 mai 2024

Ex 124.

1. Soit $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tq $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \ell_k = 0$.

On note $(L_0, \dots, L_n)$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_n[X]$ associée à $(x_0, \dots, x_n)$.

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \ell_k (\cancel{P} L_i)}_{= \lambda_i} = 0$$

Famille libre avec le bon nb de vect.

2. $P \longmapsto \int_0^1 P$ est une forme lin sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Ex 127. (1) ~~$\chi_{AB}(t) = \det($~~ $BA = B(AB)B^{-1}$

donc $\cancel{Sp}(AB) = Sp(BA)$.

$\det(\lambda I_n - AB) = \det(\lambda I_n - BA)$.

(2) But. Pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus Sp(A)$,

$$\det(\lambda I_n - (A - tI_n) B) = \det(\lambda I_n - B(A - tI_n)).$$

Ce sont des polynômes en t qui coïncident sur un ensemble infini donc ils sont égaux.

Le cas $t=0$ donne le résultat.

Ex 126. (1) $P : t \mapsto \cancel{P_A}\ \det(A + tB)$

est un polynôme réel. $P(i) \neq 0$ donc ce n'est pas le polynôme nul donc il existe $t \in \mathbb{R}$ tq $P(t) \neq 0$.

(2) Il existe $M \in GL_n(\mathbb{C})$ tq $M^{-1}AM = B$.

$M = U + iV$ — $U, V \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$AM = MB$.

~~Il existe~~ $\left.\begin{array}{l} AU = UB \\ AV = VB \end{array}\right\}$ on choisit $t \in \mathbb{R}$ tq $U + tV$ soit inv.

$A(U+tV) = \underbrace{(U+tV)}_{\text{notée } P} B$

$\left| \begin{array}{l} P^{-1}AP = B \\ P \in GL_n(\mathbb{R}) \end{array}\right.$.

Ex 128. Il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tq $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{n,n} \end{pmatrix}$

$\|A\|^2 = \|P^{-1}AP\|^2$ donc

$\sum \sum a_{i,j}^2 = \sum a_{i,i}^2$ donc $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.

Ex 129. Th spec : ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont diag.

Ex 127 $\longrightarrow$ $\chi_{{}^tAA} = \chi_{A{}^tA}$

donc ${}^tAA$ et $A{}^tA$ sont semblables à une même matrices diag donc elles sont semblables.

Ex 131. Il existe $P \in O_3(\mathbb{R})$ tq

$$P^T A P = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & & c \end{bmatrix} . \qquad \begin{cases} a+b+c=3 \\ a^2+b^2+c^2=5 \\ a^3+b^3+c^3=9 \end{cases}$$

$$\underbrace{(a+b+c)^2}_{=9} = \underbrace{a^2+b^2+c^2}_{=5} + 2(ab+bc+ca)$$

donc $ab+bc+ca = 2$.

$$\underbrace{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}_{=15} = \underbrace{a^3+b^3+c^3}_{=9} + \underbrace{a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)+c(a^2+b^2)}_{\text{donc ceci } = 6}$$

$$\underbrace{(a+b+c)(ab+bc+ca)}_{=6} = 3abc + \text{ceci} \qquad \text{donc } abc=0.$$

$$(X-a)(X-b)(X-c) = X^3-(a+b+c)X^2+(ab+bc+ca)X-abc$$
$$= X^3-3X^2+2X = X(X-1)(X-2).$$

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \qquad P^{-1}MP \text{ est noté } N.$$

$tr(AM) = 1 \iff n_{2,2}+2n_{3,3}=1$

$tr(A^2M) = 3 \iff n_{2,2}+4n_{3,3}=3$ réalisé si $N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$M \in U \iff n_{2,2}=-1,\ n_{3,3}=1.$

$$tr(M^2) = \|M\|^2 = \|N\|^2 = \sum n_{i,j}^2 \geq 2.$$

Ex 122. Soit z une rac complexe de $X^{n+1} - aX^n + aX - 1$.

$z^n(z-a) = 1 - az$. On pose $r = |z|$.

$z = re^{i\theta}$.

Prenons le module au carré :

$r^{2n}|z-a|^2 = |1-az|^2$

or $|z-a|^2 = r^2 - 2\cancel{r}a\cos(\theta) + a^2$ et $|1-az|^2 = 1 - 2ar\cos(\theta) + r^2a^2$

si $r > 1$, on obtient $|1-az|^2 > |z-a|^2$

$1 - 2ar\cos(\theta) + r^2a^2 > r^2 - 2ra\cos(\theta) + a^2$

donc $1 - a^2 - r^2 + r^2a^2 > 0$

donc $\underbrace{(1-a^2)}_{\leq 0}\underbrace{(r^2-1)}_{>0} > 0$ Impossible.

Idem si $r < 1$ dans l'autre sens. Donc $\boxed{r = 1}$.