Mardi 28 mai 2024

Ex 70. ① $R_n - \frac{1}{n!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\cdots k}$

$$0 \le R_n - \frac{1}{n!} \le \frac{1}{n!}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{k-n}} = \frac{1}{n!} \times \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{1-\frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n!} \times \frac{1}{n}$$

donc $R_n = \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!} O\left(\frac{1}{n}\right)$. Autrement dit, $R_{n+1} = \frac{1}{n!} O\left(\frac{1}{n}\right)$

② $e = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} + R_n$, $n!e = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\text{entier}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$. inexploitable

---

On va faire plus précis : $\frac{1}{(n+1)!} \le R_{n+1} \le \frac{1}{n!\,n}$

donc $\frac{1}{n+1} \le n!\,R_{n+1} \le \frac{1}{n}$ si bien que $n!\,R_{n+1} = \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$$n!e = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}}_{\text{entier}} + \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$\sin(2\pi e n!) = \sin\left(\frac{2\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \frac{2\pi}{n}$.

$\sin(2\pi e n!) \sim \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{\alpha}$. Conv $\iff \alpha > 1$.

---

③ $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!} = n+1 + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{n!}{k!}$ entier pair

$\sin((n+1)\pi + \theta) = (-1)^{n+1} \sin(\theta)$.

$$\sin(\pi e n!) = (-1)^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}\pi}{n}}_{\text{conv}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{conv abs}}$$

$\sum \sin(\pi e n!)$ conv.

Ex 59. $\{n!e\} = n!\,R_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

Ex 71. $]0,1]$ est stable par sin :

$\forall t \in]0,1], \; 0 < \sin(t) \leq t$.

(1) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décr, à valeurs dans $]0,1]$, donc conv.
Sa limite l est dans $[0,1]$ et $\sin(l) = l$ donc $l = 0$.

(2) $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$ donc $\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1/6$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ conv donc $\sum (u_{n+1} - u_n)$ conv.

$\underbrace{u_n^3}_{\geq 0} \sim -6(u_{n+1} - u_n)$ donc $\sum u_n^3$ conv.

(3) $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ donc $\sum (\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ div.

$\ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = \ln\left(\frac{\sin(u_n)}{u_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)\right) \sim \underbrace{-\frac{u_n^2}{6}}_{\leq 0}$

donc $\sum u_n^2$ div.

Ex 72. $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{3/4}} \times \frac{1}{1 + \frac{\sin(n)}{n^{3/4}}} = \underbrace{\frac{(-1)^n}{n^{3/4}}}_{\text{conv}} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)}_{\text{abs conv.}}$

Ex 73.

1- $u_n \overset{\text{def}}{=} H_n - \ln(n)$. $\quad u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

donc $\sum (u_n - u_{n-1})$ conv abs donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ conv.

2. $\ln(P_n) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right)$

$$\ln\left(1 + \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\right) = \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2k} + \varepsilon_k \quad \varepsilon_k = O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$$

$$\ln(P_n) = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k$$

$$= \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} + o(1)\right) - \frac{1}{2}\left(\ln(n) - 1 + \gamma + o(1)\right) + \left(\sum_{k=2}^{+\infty} \varepsilon_k + o(1)\right)$$

$= -\frac{1}{2}\ln(n) + (\text{une certaine constante } \alpha) + o(1)$

donc $P_n = n^{-1/2} e^{\alpha} \times \underbrace{e^{o(1)}}_{\text{tend vers } 1}$ donc $\boxed{P_n \sim \frac{e^{\alpha}}{\sqrt{n}}}$

Ex 74.

$s(n) = k \iff 10^{k-1} \leq n < 10^k \iff k-1 \leq \frac{\ln(n)}{\ln(10)} < k$

$s(n) \sim \frac{\ln(n)}{\ln(10)}$ donc $s(n) = o(n^{1/2})$ et $\frac{s(n)}{n(n+1)} = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$. Conv.

$$\sum_{n=10^{t-1}}^{10^t-1} \frac{s(n)}{n(n+1)} = \sum_{n=10^{t-1}}^{10^t-1} t\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = t\left[\frac{1}{10^{t-1}} - \frac{1}{10^t}\right] = 9 \times t\, 10^{-t}.$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{s(n)}{n(n+1)} = \sum_{t=1}^{+\infty} \sum_{n=10^{t-1}}^{10^t-1} \frac{s(n)}{n(n+1)} = \sum_{t=1}^{+\infty} 9 \times t \cdot 10^{-t}.$$

$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{t=0}^{+\infty} x^t = \frac{1}{1-x}$. Dér terme à terme :

$\forall x \in]-1,1[, \quad \sum_{t=1}^{+\infty} t x^{t-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$. $\qquad \sum_{t=1}^{+\infty} t \left(\frac{1}{10}\right)^{t-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{100}{81}$

$$= \frac{9}{10} \times \frac{100}{81} = \frac{10}{9}.$$

Mercredi 29 mai 2024

Ex 28. (1) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & n \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}$. $f(1)=0$, $f(X^k)=kX^{k-1}$.

(2) $\chi_f(t)=t^{n+1}$. $Sp(f)=\{0\}$. $Rg(f)=n$ donc $\dim(E_0(f))=1 < mult(0,f)$.

(3) $(g(1),\dots,g(X^n)) = (X^n,\dots,1)$ = base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc g est un autom. inutile

$g^2(X^k)=X^k$ donc $g^2=Id$ donc $g^{-1}=g$.

(4) $\underbrace{M_B(h) = M_B(g)^{-1}M_B(f)}_{\text{semblables}}M_B(g)$. si h était diag —, f le serait aussi.

(5) $\cancel{u(1)}$ $\cancel{h(1)=0}$ si $k\in[\![0,n]\!]$, $h(X^k)=g(f(g(X^k)))=g(f(X^{n-k}))$.

$h(X^n)=g(f(X^0))=0$.

si $k\in[\![0,n-1]\!]$, $h(X^k)=g((n-k)X^{n-k-1})=(n-k)X^{k+1}$ valable aussi si $k=n$.

$P=\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$. $h(P)=\sum_{k=0}^{n} a_k(n-k)X^{k+1} = \cancel{nX(P-a_0)}$

$h(P)=nXP-\sum_{k=1}^{n} ka_kX^{k+1} = nXP-X^2P'$.

$\boxed{u(P) = nXP-(X^2-1)P'}$.

(6) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ n & \ddots & 2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & n \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(7) $P_k' = k(X-1)^{k-1}(X+1)^{n-k} + (n-k)(X-1)^k(X+1)^{n-k-1}$

$\cancel{u(P_k) = (X-1)^{k+1}(X}$ $(X^2-1)P_k' = k(X-1)^k(X+1)^{n-k+1} + (n-k)(X-1)^{k+1}(X+1)^{n-k}$.

$u(P_k) = P_k\cdot(nX-k(X+1)-(n-k)(X-1)) = (n-2k)P_k$ val pr toutes distinctes

On en déduit que u est diag —, que $(P_0,\dots,P_n)$ est une base de diag,

et que $M_B(u) = \begin{bmatrix} n & & 0 \\ & n-2 & \\ & & \ddots \\ & & & -n+2 \\ 0 & & & & -n \end{bmatrix}$. $\det(u) = \prod_{k=0}^{n}(n-2k) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (-1)^{p+1}\dfrac{(2p+1)!^2}{p!\,2^p} & \text{si } n=2p+1. \end{cases}$

$(2p+1)\dots1(-1)\dots(-2p-1)$

Ex 31.

1.1. $Sp(B^T) = Sp(B)$ donc $\alpha \in Sp(B^T)$.

1.2. $\alpha \in Sp(A)$ donc on peut choisir $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ non nulle tq $AX = \alpha X$.

$$\left.\begin{array}{l} AX = \alpha X \\ Y^T B = \alpha Y^T \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} AXY^T = \alpha X Y^T \\ = XY^T B. \end{array}$$

Posons $M = XY^T$. $\quad M = \left[y_1 X \middle| \cdots \middle| y_n X \right] \neq 0$ et $AM = MB$.

2.1. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, ~~E étant de dim finie~~

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Soit H un sev de E.

On suppose que $H \oplus \mathrm{Ker}(f) = E$.

Alors
$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$
est un isom.

2.2. On prend
$$f_M : \begin{array}{ccc} M_{n,1}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & M_{n,1}(\mathbb{C}) \\ U & \longmapsto & MU \end{array}.$$

$\mathcal{B}$ = base can de $M_{n,1}(\mathbb{C})$. Alors $M = M_{\mathcal{B}}(f_M)$.

Soit H un suppl de $\mathrm{Ker}(M)$ dans $M_{n,1}(\mathbb{C})$.

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathrm{Im}(M) \\ U & \longmapsto & MU \end{array}$$
est un isom :

Soit $(U_{r+1}, \dots, U_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(M)$.

Soit $(U_1, \dots, U_r)$ une base de H.

$\mathcal{U} \overset{\text{déf}}{=} (U_1, \dots, U_n)$ est alors une base de $M_{n,1}(\mathbb{C})$.

$(MU_1, \dots, MU_r)$ est une base de $\mathrm{Im}(M)$. On la complète en une base $\mathcal{V}$ de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$$M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f_M) = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right].$$

Formule ch de base : $M_{\mathcal{U},\mathcal{V}}(f_M) = M_{\mathcal{B}}(\mathcal{V})^{-1} \times M \times M_{\mathcal{B}}(\mathcal{U})$.

2.3. $A Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} = Q \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} B$ (ex 31 fin)

donc $(Q^{-1} A Q) \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (P^{-1} B P)$.

On déc $Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}$ et $P^{-1} B P = \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$

On obtient $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix} = \cancel{\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

donc $A_3 = 0$ et $B_2 = 0$ et $A_1 = B_1$

$Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_4 \end{bmatrix}$ $\qquad P^{-1} B P = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix}$.

$\chi_A = \chi_{A_1} \chi_{A_4}$ et $\chi_B = \chi_{A_1} \chi_{B_4}$.

A et B ont au moins une val pr en commun.

Ex 37. (1) $X^2 + X + 4$ est un ply ann de A.

$$X^2 + X + 4 = \left(X + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} = \left(X + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}\right)\left(X + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{15}}{2}\right).$$

$Sp_{\mathbb{C}}(A) \subset \left\{ -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{15}}{2} \right\}$. Pas de val pr réelle.

(2) Posons $\alpha = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{15}}{2}$. $\qquad n = \underbrace{\mathrm{mult}(\alpha, A)}_{m_\alpha} + \underbrace{\mathrm{mult}(\bar\alpha, A)}_{m_{\bar\alpha}}$, $m_\alpha = m_{\bar\alpha}$

$n = 2\,\mathrm{mult}(\alpha, A)$.

(3) $tr(A) = \alpha m_\alpha + \bar\alpha m_{\bar\alpha} = (\alpha + \bar\alpha)\frac{n}{2} = -\frac{n}{2}$.

$\det(A) = \alpha^{m_\alpha} \bar\alpha^{m_{\bar\alpha}} = |\alpha|^{2 \times m_\alpha} = 4^{n/2} = 2^n$.

$\alpha\bar\alpha = 4$

Ex35. $AB = BA \iff$ système moche.

~~$b_{11} + 2b_{12} + 3b_{13}$~~ Traitons ex 36 d'abord.

Ex36. 1. On sait que f est diag et ses esp pr sont de dim 1 :

$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ base de diag et $f(e_k) = \lambda_k e_k$.

$M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$. $M_{\mathcal{E}}(P(f)) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix}$.

2. $E_{\lambda_k}(f)$ est stable par g : $g(e_k) \in \mathrm{Vect}(e_k)$.

$M_{\mathcal{E}}(g)$ est de la forme $\begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$.

Réciproquement, si $M_{\mathcal{E}}(g)$ est diag, g et f commutent.

3. $\mathrm{Comm}(f) = \{ g \in \mathcal{L}(E) ; M_{\mathcal{E}}(g) \text{ diag} \}$.

D'après l'interp de Lagrange, pour tout $(\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n$,

il existe $P \in \mathbb{C}_{n-1}[X]$ tq $(P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.

Ainsi, $\left\{ \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix} ; (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^n \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & P(\lambda_n) \end{pmatrix} ; P \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \right\}$

et $\mathrm{Comm}(f) = \{ Q(f) ; Q \in \mathbb{C}_{n-1}[X] \}$.

$\begin{array}{rcl} \mathrm{Comm}(f) & \longrightarrow & D_n(\mathbb{C}) \\ g & \longmapsto & M_{\mathcal{E}}(g) \end{array}$ est un isom donc $\dim(\mathrm{Comm}(f)) = n$.

Ex 35. $Sp(A) = \{1, 4, 6\}$ donc $\dim(\mathrm{Comm}(A)) = 3$

d'après Ex 36.

Jeudi 30 mai 2024

Ex 89. $h : x \mapsto \int_a^b f(t)g(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt\, f(x)$. h est cont.

Th bornes atteintes $\min_{[a,b]} f = f(m)$ $\max_{[a,b]} f = f(M)$.

$h(m) = \int_a^b (f(t)-f(m))g(t)\,dt \geq 0$, $h(M) = \int_a^b (f(t)-f(M))g(t)\,dt \leq 0$

Th val int.

Ex 91. $\frac{e^t}{\text{Arcsin}(t)} \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{t}$. $\varphi(t) = \frac{e^t}{\text{Arcsin}(t)} - \frac{1}{t}$.

$$\varphi(t) = \frac{te^t - \text{Arcsin}(t)}{t\,\text{Arcsin}(t)} = \frac{(t+t^2+o(t^2)) - (t+o(t^2))}{t^2+o(t^2)} = \frac{t^2+o(t^2)}{t^2+o(t^2)} = \frac{1+o(1)}{1+o(1)}.$$

$\varphi(t) \xrightarrow[t\to 0]{} 1$ donc φ est int sur $]0,1]$.

$$\int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{\text{Arcsin}(t)}\,dt = \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{t}\,dt + \int_{x^2}^{x^3} \varphi(t)\,dt = \ln(x) + \underbrace{\int_{x^2}^1 \varphi - \int_{x^3}^1 \varphi}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 0}$$

donc ceci $= \ln(x) + \underset{x\to 0}{o}(1)$.

Ex 95. ① $\cancel{\varphi}$ ~~fn~~ $\forall t \geq 1, 0 \leq e^{-t^n} \leq e^{-t}$. $\int_1^{+\infty} e^{-t}\,dt$ conv.

② $f_n(t) = e^{-t^n}$. $f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } t\in[0,1[\\ e^{-1} & \text{si } t=1 \\ 0 & \text{si } t>1 \end{cases}$

$|f_n(t)| \leq \begin{cases} 1 & \text{si } t\in[0,1] \\ e^{-t} & \text{si } t>1 \end{cases}$ cpm et int.

Th conv dom : $\int_0^{+\infty} e^{-t^n}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 1\,dt = 1$.

Ex39. $P = X^3 - X - 1$. $\qquad P' = 3X^2 - 1$.

t		$-1/\sqrt{3}$		$1/\sqrt{3}$	
$P(t)$	$\nearrow$	<0	$\searrow$	<0	$\nearrow$

$P\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) = +\frac{2}{3\sqrt{3}} - 1 < 0$

Unique racine réelle $\alpha > 1/\sqrt{3}$.

Deux racines non réelles conj β et $\bar{\beta}$.

$Sp(A) \subset \{\alpha, \beta, \bar{\beta}\}$.

$\det(A) = \alpha^{m_\alpha} (\beta\bar{\beta})^{m_\beta} > 0$.

Ex40. 1. $(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \geq 0$. $\qquad (AB)\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$.

2. $A\underbrace{\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}}_{\neq 0} = 1 \times \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$. $\qquad$ si $\begin{cases} AX = \lambda X, \\ X \neq 0 \end{cases}$ alors

On prend k tq $|x_k| = \|X\|_\infty$.

$\lambda x_k = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} x_j$.

$|\lambda| \cdot |x_k| \leq \sum_{j=1}^{n} a_{k,j} |x_k| = |x_k|$. $\qquad$ Plus généralement, $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$

$|x_k| > 0$ donc $|\lambda| \leq 1$.

3. $\mathrm{Ker}(A-I) \subset \mathrm{Ker}(A-I)^2$.

Soit $U \in \mathrm{Ker}(A-I)^2$. $\qquad$ Posons $V = (A-I)U$. $\quad$ Alors $V \in \mathrm{Im}(A-I)$ et $V \in \mathrm{Ker}(A-I)$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, posons $W_k = \frac{1}{k}(I + A + \dots + A^{k-1})$.

$W_k V = V \xrightarrow[k\to+\infty]{} V$.

$W_k V = \frac{1}{k}(I + A + \dots + A^{k-1})(A-I)U = \frac{1}{k}(A^k - I)U$.

$\|W_k V\|_\infty \leq \frac{1}{k}(\|A^k U\|_\infty + \|U\|_\infty) \leq \frac{2}{k}\|U\|_\infty$ donc $W_k V \to 0$.

Unicité de la limite : $V = 0$ donc $U \in \mathrm{Ker}(A-I)$.

$$\boxed{\mathrm{Ker}((A-I)^2) = \mathrm{Ker}(A-I)}.$$

Ex 9 2.

$\varphi(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$ $\quad \varphi$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$.

$= \sqrt{-1 + \dfrac{1}{1-x}}$ et str cr.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \times \frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{1-x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}.$$

x	0		1
$\varphi(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ch de var $u = \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$. $\quad u^2(1-x) = x$

$x = \dfrac{u^2}{1+u^2}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}(1-x)^{3/2}}\,dx$ a la même nature que $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2\ln\left(\frac{u^2}{1+u^2}\right)du$.
(et éventuellement la même valeur)

$$F(x) = \int_1^x \ln\left(\frac{u^2}{1+u^2}\right)du = \int_1^x \left[2\ln(u) - \ln(1+u^2)\right]du$$

$$\int_1^x \ln(u)\,du = x\ln(x) - x + 1.$$

$2x^2 = 2(x^2+1) - 2$

$$\int_1^x \ln(1+u^2)\,du = \left[x\ln(1+x^2)\right]_1^x - \int_1^x \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx = x\ln(1+x^2) - \ln(2) - 2(x-1) + 2\,\mathrm{Arctan}(x) - \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_1^x \ln\left(\frac{u^2}{1+u^2}\right)du = 2x\ln(x) \underbrace{-2x - x\ln(1+x^2) \cancel{+\ldots} + 2x}_{=0} - 2\,\mathrm{Arctan}(x) + \text{cste}$$

$$= -x\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\,\mathrm{Arctan}(x) + \text{cste}.$$

$F(x) \xrightarrow[x \to 0]{} \text{cste}$.

$F(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\pi + \text{cste}$

L'intégrale étudiée existe et vaut -2π.

Ex 98.

a. $t \longmapsto \dfrac{\sin(t)}{\cos(t)+x}$ cont sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

$t \longmapsto \operatorname{Arctan}(\dots)$ cont et bornée sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

$u \longmapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$ cont sur $]0,1]$, lim finie en 0.

b. $g(x,t) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)+x}\right)$.

$\boxed{1}$ Pour tout $x \geq 0$, $t \longmapsto g(x,t)$ est int sur $[0, \pi/2[$.

$\boxed{2}$ Pour tout $t \in [0, \pi/2[$, $x \longmapsto g(x,t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0, +\infty[$.

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = -\frac{\sin(t)}{(\cos(t)+x)^2} \times \frac{1}{1 + \frac{\sin^2(t)}{(\cos(t)+x)^2}} = \frac{-\sin(t)}{1+2x\cos(t)+x^2}$$

$\boxed{3}$ $\left|\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq \sin(t)$ int, ind de x.

Th dér. $f'(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{-\sin(t)}{1+2x\cos(t)+x^2}\, dt$.

$f'(0) = -\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(t)\, dt = -1$.

si $x > 0$. $f'(x) = \left[\dfrac{1}{2x} \ln(1+2x\cos(t)+x^2)\right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \dfrac{\ln(1+x^2) - 2\ln(1+x)}{2x}$.

c. $f(1) - f(0) = \displaystyle\int_0^1 f'(x)\, dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{2x}\, dx}_{u = x^2 \quad \frac{du}{u} = 2\frac{dx}{x}} - \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx$.

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x^2)}{2x}\, dx = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}\, du$ donc $f(1) - f(0) = -\dfrac{3}{4} I$.

d. $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{u^{n-1}}{n}\right) du$. $f_n(u) = (-1)^{n-1}\dfrac{u^{n-1}}{n}$.

$\displaystyle\int_0^1 |f_n(u)|\, du = \frac{1}{n^2}$. / $\displaystyle\sum \int_0^1 |f_n(u)|\, du < +\infty$. On peut int terme à terme.

$I = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$. $I - \zeta(2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} - 1}{n^2} = -2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k)^2} = -\frac{1}{2}\zeta(2)$

donc $I = \dfrac{1}{2}\zeta(2)$.

Ex 98 (fin).

$$f(0) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{Arctan}\left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\right) dt = \int_0^{\pi/2} t\, dt = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$f(1) = \int_0^{\pi/2} \mathrm{Arctan}\left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)+1}\right) dt = \int_0^{\pi/2} \mathrm{Arctan}\left(\frac{2\cos(\frac{t}{2})\sin(\frac{t}{2})}{2\cos^2(\frac{t}{2})}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{t}{2} dt = \frac{\pi^2}{16}.$$

$$f(1) - f(0) = -\frac{\pi^2}{16}. \qquad I = -\frac{4}{3}\left(f(1) - f(0)\right) = \frac{\pi^2}{12}.$$

or $\zeta(2) = 2I = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Ex 99. ① $e^{iu} - 1 = e^{i\frac{u}{2}}\, 2i\sin\left(\frac{u}{2}\right)$

donc $|e^{iu} - 1| = 2\left|\sin\left(\frac{u}{2}\right)\right| \leq 2 \times \frac{|u|}{2} = |u|$.

② $g(x,t) = \dfrac{e^{ixt} - 1}{t} e^{-t}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. $t \mapsto g(x,t)$ est cont sur $]0,+\infty[$. $|g(x,t)| \leq |x| e^{-t}$.

$t \mapsto e^{-t}$ est int sur $]0,+\infty[$ donc $t \mapsto g(x,t)$ aussi.

③ $\boxed{1}$ ça. $\boxed{2}$ Pour tout $t > 0$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, avec

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,t) = i e^{ixt} e^{-t}.$$

$\boxed{3}$ $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq e^{-t}$ indép de x, int.

Th dér terme à terme : f est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f'(x) = \int_0^{+\infty} i e^{ixt} e^{-t} dt$.

$$f'(x) = \left[\frac{i}{-1+ix} e^{ixt} e^{-t}\right]_0^{+\infty} = \frac{i}{1+ix} = \frac{i(1-ix)}{1+x^2} = \frac{x+i}{1+x^2}.$$

$$\left|\frac{i}{-1+ix} e^{ixt} e^{-t}\right| = \frac{e^{-t}}{\sqrt{1+x^2}} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$$

$f(0) = 0$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + i\,\mathrm{Arctan}(x).}$$