Samedi 1er juin 2024.

Ex 134. $l \overset{\text{déf}}{=} \inf\limits_{n \geq 1} \dfrac{a_n}{n}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tq $\dfrac{a_p}{p} \leq l + \varepsilon$. (cdivenel)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\begin{cases} n = pq + r \\ r \in [\![0, p-1]\!] \end{cases}$.

$a_n \leq q\, a_p + a_r$. $\qquad \dfrac{q}{n} = \dfrac{n-r}{pn} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{r}{pn}$

$$\frac{a_n}{n} \leq \frac{q}{n} a_p + \frac{a_r}{n} = \frac{a_p}{p} + \frac{1}{n}\Big(\underbrace{a_r - r\frac{a_p}{p}}_{\text{noté } b_r}\Big).$$

on pose $\alpha = \max(b_0, \dots, b_{p-1})$. Alors $\dfrac{a_n}{n} \leq \underbrace{\dfrac{a_p}{p}}_{\leq l+\varepsilon} + \dfrac{\alpha}{n}$. $\quad$ $\leq \varepsilon$ à partir d'un certain rang n_ε.

$\forall n \geq n_\varepsilon,\ l \leq \dfrac{a_n}{n} \leq l + 2\varepsilon$. $\qquad \dfrac{a_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$

---

137. $1 + \dfrac{i}{k} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{k^2}}\ e^{i \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right)}$, $\qquad \theta_n$.

$$Z_n = \underbrace{\left(\prod_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\right)}_{r_n} e^{i\left(\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{k}\right)\right)}$$

$$\ln(r_n) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \longrightarrow \text{noté } S.$$

$r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^S$.

$\operatorname{Arctan}\left(\dfrac{1}{k}\right) = \dfrac{1}{k} + \varepsilon_k$ avec $\varepsilon_k = O\left(\dfrac{1}{k^2}\right)$ donc $\theta_n = \ln(n) + \underbrace{\gamma + \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k}_{\text{noté } T} + o(1)$

$$Z_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{S+iT}\, e^{in}$$

(en particulier, la suite div mais on a un éq).

Ex 136.

a. $f(t) = t - e^{-1/t}$. f est $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

$\forall t>0$, $f'(t) = 1 + \frac{1}{t^2} e^{-1/t} > 0$. $f(t) \xrightarrow[t>0]{} 0$.

$]0,+\infty[$ est stable par $f \longrightarrow$ la suite est bien déf et >0

$u_{n+1} < u_n$. décr min donc conv.

$e^{-1/u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $-1/u_n \longrightarrow -\infty$ donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b. La question est d'avoir $\frac{1}{n} u_n^{-\frac{1}{\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

ou encore $\frac{1}{n}\left(u_n^{-\frac{1}{\alpha}} - u_0^{-\frac{1}{\alpha}}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

ce qui revient par le th de Césaro à $u_{n+1}^{-\frac{1}{\alpha}} - u_n^{-\frac{1}{\alpha}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$u_{n+1}^{-\frac{1}{\alpha}} - u_n^{-\frac{1}{\alpha}} = u_n^{-\frac{1}{\alpha}}\left[\left(1 - \frac{e^{-1/u_n}}{u_n}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right].$$

$\begin{cases} e^{-s} s \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0 \\ 1/u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{cases}$ donc $\frac{e^{-1/u_n}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. $(1-t)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1 \underset{t\to 0}{\sim} \frac{t}{\alpha}$

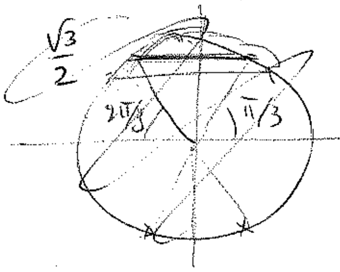
~~donc~~ $u_{n+1}^{-1/\alpha} - u_n^{-1/\alpha} \sim \frac{1}{\alpha} u_n^{-1-\frac{1}{\alpha}} e^{-1/u_n}$ ceci tend vers 0 aussi.

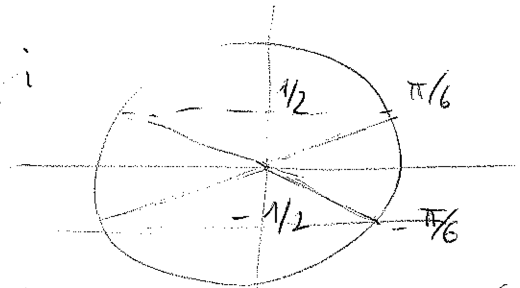
Ex 138 :

1re version. $\sin^2(n) = \dfrac{1-\cos(2n)}{2}$. $\sum \frac{1}{n}$ div

$\sum \frac{\cos(n)}{n}$ conv par transf d'Abel. donc div

2e version.





amplitude $< \pi/3 < 2$

parmi $n-1$, n et $n+1$, il y a au plus deux indices k tq $|\sin(k)| \leq \frac{1}{2}$.

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=3p-2}^{3p} \frac{\sin^2(n)}{n} \geqslant \frac{1/4}{3p}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2(n)}{n} \geqslant \frac{1}{12} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p} = +\infty$.

Ex 139.

Hölder. Si $p>1$, en posant $q = \frac{p}{1-p}$, $|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}$.

1er cas : $x \geqslant 1$. $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc $a_n^x = O(a_n)$ et $\frac{a_n^x}{n} = O(a_n)$ et conti.

2e cas : $x < 1$. On pose $p = 1/x$ et $q = p/1-p$.

$0 \leq \dfrac{a_n^x}{n} = \cancel{\frac{a}{n}} \leq \dfrac{1}{p}\left(a_n^x\right)^p + \dfrac{1}{q} \times \left(\dfrac{1}{n}\right)^q = \dfrac{1}{p} a_n + \dfrac{1}{q} \times \dfrac{1}{n^q}$ Conv.

Ex 141.

① Soit $x \in]-1,1[$. $\forall t \in]0,1[$, $\dfrac{1-t^x}{1-t} = (1-t^x)\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{(t^n - t^{n+x})}_{\text{noté } f_n(t)}$.

$\boxed{1}$ f_n est int sur $]0,1[$.

$\boxed{2}$ $\sum f_n$ conv simp sur $]0,1[$.

$f_n(t)$ a le signe de x

$\boxed{3}$ $\int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \left|\int_0^1 f_n(t)\,dt\right| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+x+1}\right| = \frac{|x|}{(n+1)(n+x+1)}$

$\sum \int_0^1 |f_n|$ conv. On peut int terme à terme.

$\int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt$ existe et vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (t^n - t^{n+x})\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(n+1)(n+x+1)}$.

② $1 \leq \zeta(k+1) \leq \zeta(2)$ donc $R\left(\sum (-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^k\right) = 1$.

$\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{k+1}\frac{1}{n^{k+1}}x^k\right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \zeta(k+1)|x|^k < +\infty$ donc

on peut Fubini :

$\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^k = \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}}x^k = \sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{n^{k+1}}x^k$

pareil.

$= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^2}{n^2}x^1 \times \frac{1}{1+\frac{x}{n}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x}{n(n+x)}$.

③ La suite $(\zeta(k))_{k\geq 2}$ conv vers 0 en décroissant donc $\sum (-1)^{k+1}\zeta(k+1)$ conv.

On prouve la conv unif de $\sum_{k\geq 1}(-1)^{k+1}\zeta(k+1)x^k$ sur $[0,1]$,

si bien que la somme est cont sur $[0,1]$.

th cont sous l'int : $x \longmapsto \int_0^1 \frac{1-t^x}{1-t}\,dt$ est cont sur $[0,1]$ aussi.

~~$|1-t^x| \leq$~~ $0 \leq 1-t^x \leq 1-t$ $\left|\frac{1-t^x}{1-t}\right| \leq 1$.

La cont en 1 donne $\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^{k+1}\zeta(k+1) = \int_0^1 \frac{1-t}{1-t}\,dt = 1$.

$$\|$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\zeta(2k) - \zeta(2k+1)\right)$$