Mardi 4 juin 2024

Ex 41. $f(x) = x - \frac{(x|u)}{(u|u)} u$.

f est le proj orth sur $\mathrm{Vect}(u)^\perp$.

Ex 42. $M^T = M$ $\quad M^T M = I - 4 L^T L + 4 (L^T L)^2$.

$(L^T L)^2 = L^T (L L^T) L$ or $L L^T = (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$

donc $(L^T L)^2 = (L^T L)$ si bien que $M^T M = I_n$.

M est orth et $M^2 = I_n$ donc sym orth.

Axe $= \mathrm{Ker}(M - I_n) = \mathrm{Ker}(L^T L)$.

$L^T L U = 0 \iff L^T \times (L^T | U) = 0 \iff U \perp L^T$.

Axe = orthogonal de $\mathrm{Vect}((a_1, \dots, a_n))$.

Ex 43. a. $(P|P) = \sum_{k=0}^{2} P(k)^2 \geq 0$.

Si $(P|P) = 0$, $\begin{cases} P \text{ a pour racines } 0,1,2 \\ \deg(P) \leq 2 < 3 \end{cases}$ donc $P = 0$.

b. On prend $P_0 = 1$ et $P_1 = X - \frac{(X|P_0)}{(P_0|P_0)} P_0$.

$(P_0|P_0) = 1^2 + 1^2 + 1^2 = 3$. $\quad (X|P_0) = 0 \times 1 + 1 \times 1 + 2 \times 1 = 3$.

$P_1 = X - 1$.

Ex 44.

$$M = \begin{bmatrix} m_{1,1} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & m_{n,n} \end{bmatrix}.$$

$Sp(M) = \{m_{1,1}, \dots, m_{n,n}\}$.

or $Sp_{\mathbb{R}}(M) \subset \{\pm 1\}$.

dém : si $MU = \lambda U$
$U \neq 0$

$\|MU\| = |\lambda| \, \|U\|$

or $\|MU\| = \|U\|$ et $\|U\| > 0$

donc $|\lambda| = 1$.

donc $m_{1,1}, \dots, m_{n,n} \in \{\pm 1\}$.

$\sum_{j=i}^{n} m_{i,j}^2 = 1$ donc $m_{i,j} = 0$ si $j > i$. M est diag.

$$M = \begin{bmatrix} \pm 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pm 1 \end{bmatrix}.$$

Ex 47. Soit $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(A)$. Soit U un vect pr associé.

$AU = \lambda U$ conj : $A\overline{U} = \overline{\lambda}\,\overline{U}$

transp : $\overline{U}^T(-A) = \overline{\lambda}\,\overline{U}^T$

$\overline{U}^T A U = \lambda \overline{U}^T U$

$\overline{U}^T(-A)U = \overline{\lambda}\,\overline{U}^T U$

donc $\lambda \overline{U}^T U = -\overline{\lambda}\,\overline{U}^T U$.

or $\overline{U}^T U = \sum_{k=1}^{n} |u_k|^2 > 0$ donc $\lambda = -\overline{\lambda}$

donc $\lambda \in i\mathbb{R}$.

Ex 48. $A_{i,i} = E_i^T A E_i > 0$.

Ex 49. $S = Q D Q^T$ $\quad Q \in O_n(\mathbb{R})$, $D = \begin{bmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{bmatrix}$.

$PS = PQDQ^T$, $\mathrm{tr}(PS) = \mathrm{tr}(Q^T P Q \; D)$.

À Q fixé $P \longmapsto Q^T P Q$ est une bij de $O_n(\mathbb{R})$ sur $O_n(\mathbb{R})$.

La question devient : ~~max~~ trouver $\max\{\mathrm{tr}(RD)\ ;\ R \in O_n(\mathbb{R})\}$.

$\mathrm{tr}(RD) = (R^T \mid D) = \sum_{k=1}^{n} d_k R_{k,k}$

or $\left.\begin{array}{l} R_{k,k} \in [-1,1] \\ d_k \geqslant 0 \end{array}\right\}$ donc $\mathrm{tr}(RD) \leq \sum_{k=1}^{n} d_k$ réalisé par le choix $R = I_n$.

Finalement, le max cherché vaut $\mathrm{tr}(S)$.

Mercredi 5 juin 2024

Ex 75.

1. Déc binaire : ϕ réalise une bij de $\{0,1\}^n$ sur $[\![0, 2^n-1]\!]$.

2. $u_n(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2^n-1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{1-x}$.

Ex 76 - si $n \geq 0$, $f_n(0) = 0$ donc $f_n(0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. ~~limite~~

$f_n(\pi/2) = 0 \longrightarrow 0$.

si $t \in]0, \pi/2[$, $0 < \sin(t) < 1$. ~~donc n sin~~ | exposant $\longrightarrow -\infty$ donc $f_n(t) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

$$f_n(t) = \cos(t) \; e^{\underbrace{n\ln(\sin(t))}_{\text{cste}<0} + \ln(n)}$$

$$f_n'(t) = n\left[-\sin^{n+2}(t) + n\cos^2(t)\sin^n(t)\right]$$

$$= n\sin^n(t)\left[n\cos^2(t) - \sin^2(t)\right]$$

si $t \neq \frac{\pi}{2}$

$$= n\sin^n(t)\cos^2(t)\left[n - \tan^2(t)\right].$$

t	0		$\text{Arctan}(\sqrt{n})$		$\pi/2$
$f_n(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

$$\|f_n\|_\infty = f_n(\text{Arctan}(\sqrt{n})) = n\cos(\text{Arctan}(\sqrt{n}))\sin^n(\text{Arctan}(\sqrt{n}))$$

$\cos^2(\text{Arctan}(u)) = \frac{1}{1+\tan^2(\text{Arctan}(u))} = \frac{1}{1+u^2}$ | ~~$\sin^2(\text{Arctan}(u)) = \frac{u^2}{1+u^2}$~~.

$\cos(\text{Arctan}(u)) > 0$ donc $= \sqrt{\frac{1}{1+u^2}}$ $\sin = \tan \times \cos$ donc

$\sin(\text{Arctan}(u)) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$.

$$\|f_n\|_\infty = \frac{n}{1+n} \times \left(\frac{\sqrt{n}}{1+n}\right)^n \leq \frac{1}{n^{n/2}}$$

donc $\|f_n\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Ex 77.

1. $|\mathrm{Arctan}(u)| \leq |u|$ donc $|f_n(x)| \leq \dfrac{|x|}{n^{3/2}}$.

2. si $|x| \leq r$, alors $|f_n(x)| \leq \dfrac{r}{n^{3/2}}$.

$\|f_n\|_{\infty, [-r,r]} \leq \dfrac{r}{n^{3/2}}$. Conv nom sur $[-r, r]$.

f est cont sur $[-r, r]$.

local $\to$ global

Ex 78.

① si $x > 0$, $\left(\dfrac{1}{1+nx}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est décr de lim nulle.

Th série alt $\to$ conv

$f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{1+nx}$. f_n cont. $R_N(x) = \displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)$.

Th série alt : $|R_N(x)| \leq |f_{N+1}(x)| = \dfrac{1}{1+(N+1)x}$.

Soit $a > 0$. $\forall x \geq a$, $|R_N(x)| \leq \dfrac{1}{1+(N+1)a}$.

$\|R_N\|_{\infty, [a, +\infty[} \leq \dfrac{1}{1+(N+1)a} \longrightarrow 0$ conv unif sur $[a, +\infty[$.

local $\to$ global

S est cont sur $[a, +\infty[$.

② $\boxed{1}$ ~~$\forall n \in \mathbb{N}$,~~ $f_0(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$

si $n \geq 1$, $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$.

$\boxed{2}$ Conv unif sur $[1, +\infty[$.

Th double limite : $\boxed{S(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1.}$

Ex79.

(1) Si $x>0$, $n^2 e^{-x\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. $u_n(x) = o\left(1/n^2\right)$.

(2) $\|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = u_n(a)$. Conv norm sur $[a,+\infty[$.

(3) $\boxed{1}$ ~~an~~ Pour tout $n\geqslant 1$, u_n est int sur $[1,+\infty[$.

$\boxed{2}$ Conv simple.

$\boxed{3}$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} |u_n(x)|\,dx = \int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}\,dx = \left[-\frac{e^{-x\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}\right]_1^{+\infty} = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

Ceci $= o\left(1/n^2\right)$ donc $\sum \int_1^{+\infty} |u_n|$ conv.

On peut int terme à terme : f est int sur $[1,+\infty[$

et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

(4) On va faire ça par l'absurde.

Le même raisonnement que précédemment donne :

$\displaystyle\forall a>0,\ \int_a^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-a\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.) Noté $g(a)$.

~~On suppose que g a une lim~~ g est décr donc a une lim en 0.

On suppose qu'elle est finie, notée l.

Alors : $\forall a>0$, $g(a)\leqslant l$.

Par ailleurs : $\forall N\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle g(a) \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{e^{-a\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

On fait tendre a vers 0 : $\displaystyle l \geqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

La suite $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{N\geqslant 1}$ est donc bornée. C'est faux : elle tend vers $+\infty$.

Ainsi, $g(a) \xrightarrow[a\to 0^+]{} +\infty$ donc f n'est pas int sur $]0,+\infty[$.

Ex 79 (suite)

5. $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ (th double lim)

$f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ (même dém abs)

6. Méthode direct :

$\cancel{\int_1 \leq f(x)}$ $\underbrace{\int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt}_{\text{noté } h(x)} \leq f(x) \leq \int_1^{+\infty} e^{-x\sqrt{t}}\,dt + e^{-x}$

$t = u^2$: $h(x) = \int_1^{+\infty} e^{-xu}\, 2u\,du \underset{v = xu}{=\!=} \int_x^{+\infty} e^{-v} \frac{2v\,dv}{x^2}$

$\int_x^{+\infty} \underset{\text{prim}}{e^{-v}} \underset{\text{dér}}{v}\,dv = \left[-e^{-v} v\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} (-e^{-v})\,dv$

$= e^{-x} x + e^{-x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} 1$

donc $h(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}$. Finalement, $\boxed{f(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \frac{2}{x^2}.}$

Jeudi 6 juin 2024

113. $f \circ f = f \iff \forall x \in \mathrm{Im}(f),\ f(x) = x.$

~~Choisir f~~ On note $A_k = \{ f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!] \text{ tq } f \circ f = f$ et $\mathrm{card}(\mathrm{Im}(f)) = k \}$.

Choisir f dans A_k c'est ① choisir k ~~pts~~ éléments de $[\![1,n]\!]$ $\to \binom{n}{k}$ choix ;

② envoyer ces éléments sur eux-mêmes ; $\longrightarrow$ 1 choix

③ pour chaque autre éléments, choisir son image parmi les k éléments du début : k^{n-k} choix.

$$\mathrm{Card}(A_k) = \binom{n}{k} k^{n-k}$$

$$\boxed{\text{Total} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k^{n-k}}.$$

115. ① $S_n = X_1 + 2(X_2 + \dots + X_n) + X_{n+1}$

lin esp : $\mathbb{E}(S_n) = p + 2(p + \dots + p) + p = \cancel{2(n-1)}p$ $2np$.

ind : $\mathbb{V}(S_n) = \cancel{2}\,p(1-p) + 4(p(1-p) + \dots + p(1-p)) + p(1-p)$

$= p(1-p)[\cancel{4(p-2)}\, 4(n-1) + 2] = p(1-p)(4n-2).$

② Bienaymé-Tchebyshev :

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathbb{V}\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)(4n-2)}{\varepsilon^2 n^2} \longrightarrow 0.$$

Ex 120.

k	1	2	3	4	5	6	...
$\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$	1	1	2	2	3	3	...

① $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.

$(Y=k) = (X=2k-1) \underset{\text{disj}}{\cup} (X=2k)$

$\mathbb{P}(Y=k) = p(1-p)^{2k-2} + p(1-p)^{2k-1} = p(1-p)^{2k-2}(1+1-p)$

$= p(2-p)\left[(1-p)^2\right]^{k-1}$ or $p(2-p) = 1-(1-p)^2$.

$Y \sim \mathcal{G}\left(1-(1-p)^2\right)$.

②

X	1	2	3	4	5	6	7	8
Y	1	1	2	2	3	3	4	4
$\underbrace{2Y-X}_{\text{noté } Z}$	1	0	1	0	1	0	1	0

$Z(\Omega) = \{0,1\}$. $(Z=1) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} (X=2k+1)$ disj-dén.

$\mathbb{P}(Z=1) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=2k+1) = \sum_{k=0}^{+\infty} p(1-p)^{2k} = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{2-p}$

$\mathbb{P}(Z=0) = 1 - \frac{1}{2-p} = \frac{1-p}{2-p}$. $X = 2Y - Z$

ça colle.

$(Y=k, Z=1) = (X=2k-1)$

$\mathbb{P}(Y=k, Z=1) = p(1-p)^{2k-2}$

$\mathbb{P}(Y=k)\,\mathbb{P}(Z=1) = p(2-p)\left((1-p)^2\right)^{k-1} \times \frac{1}{2-p} = p(1-p)^{2k-2}$

Ex 121.

a. $0 \leq \mathbb{P}(S_n=0) \leq 1$ donc $R\left(\sum \mathbb{P}(S_n=0)x^n\right) \geq R\left(\sum x^n\right) = 1$

donc f est déf sur $[0,1[$. Idem pour g.

b. $(S_{k+1}-S_k = l_1, S_{k+2}-S_k = l_2, \dots, S_n - S_k = l_{n-k})$

$= (X_{k+1} = l_1, X_{k+1}+X_{k+2} = l_2, X_{k+1}+X_{k+2}+X_{k+3} = l_3, \dots, X_{k+1}+\dots+X_n = l_{n-k})$

$= (X_{k+1} = l_1, X_{k+2} = l_2 - l_1, X_{k+3} = l_3 - l_2, \dots, X_n = l_{n-k} - l_{n-k-1})$

$\mathbb{P}(\dots) \underset{\text{indép}}{=} \mathbb{P}(X_{k+1}=l_1)\mathbb{P}(X_{k+2}=l_2-l_1) \times \dots \times \mathbb{P}(X_n = l_{n-k}-l_{n-k-1})$

pareil

$(S_1 = l_1, S_2 = l_2, \dots, S_{n-k} = l_{n-k})$

$= (X_1 = l_1, X_2 = l_2 - l_1, \dots, X_{n-k} = l_{n-k} - l_{n-k-1})$

$\mathbb{P}(\dots) \underset{\text{indép}}{=} \mathbb{P}(X_1 = l_1)\mathbb{P}(X_2 = l_2 - l_1) \dots \mathbb{P}(X_{n-k} = l_{n-k} - l_{n-k-1})$

donc $(S_{k+1}-S_k, \dots, S_n - S_k) \sim (S_1, \dots, S_{n-k})$.

c. $A_n^k = (S_k = 0) \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} (S_i \neq 0) = (S_k = 0) \cap \bigcap_{i=k+1}^{n} (S_i - S_k \neq 0)$

$= (X_1 + \dots + X_k = 0) \cap \left(\bigcap_{i=k+1}^{n} (X_{k+1} + \dots + X_i \neq 0)\right)$

indép par coalitions

$\mathbb{P}(A_n^k) = \mathbb{P}(S_k = 0)\,\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}(S_i - S_k \neq 0)\right) \overset{\text{question b}}{=} \cancel{\mathbb{P}(S_k=0)\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=k+1}^{n}(S_{i-k} \neq 0)\right)}$

$= \mathbb{P}(S_k = 0)\,\mathbb{P}(\underbrace{S_1 \neq 0, \dots, S_{n-k} \neq 0}_{\text{c'est } T > n-k}) = \mathbb{P}(S_k = 0)\,\mathbb{P}(E_{n-k})$.

$A_n^k =$ (parmi $0, \dots, n$, le dernier i tel que $S_i = 0$ est $i = k$).

$(A_n^k)_{0 \leq k \leq n}$ est un syst complet d'év donc $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(A_n^k) = 1$

$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k = 0)\,\mathbb{P}(E_{n-k}) = 1$.

Ex 121 (suite).

d. Produit de Cauchy (termes positifs) : $f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(S_k=0)\mathbb{P}(E_{n-k}=0)}_{=1}\Big) x^n = \frac{1}{1-x}$.

$Y_i = \frac{X_i+1}{2}$ ind $Y_i \sim \mathcal{B}(1/2)$.

$U_k = Y_1+\dots+Y_k \sim \mathcal{B}(k, 1/2)$. $(S_k=0) = \left(U_k = \frac{k}{2}\right)$.

$U_k = \frac{1}{2} S_k + \frac{k}{2}$. | $\mathbb{P}(S_k=0) = 0$ si k est impair.

$\mathbb{P}(S_{2l}=0) = \mathbb{P}(U_{2l}=l) = \binom{2l}{l}\frac{1}{2^{2l}}$.

$f(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} \binom{2l}{l}\frac{x^{2l}}{2^{2l}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

e. $E_n = (T>n)$. & $E_{n-1} = (T>n-1) = E_n \bigcup_{\text{disj}} (T=n)$

$k=n-1$

donc $\mathbb{P}(T=n) = \mathbb{P}(E_{n-1}) - \mathbb{P}(E_n)$.

Soit $x\in[0,1[$. $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T=n)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(E_{n-1})x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n$

$= \sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(E_k)x^{k+1} - \Big(\sum_{n=0}^{+\infty}\mathbb{P}(E_n)x^n - \underbrace{\mathbb{P}(E_0)}_{=1}\Big)$

$= (x-1)g(x) + 1 = 1 - \frac{1}{f(x)} = 1-\sqrt{1-x^2}$.

$\sqrt{1+u} = 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2n-1}(-1)^n \frac{u^n}{2^{2n}}$.

Unicité DSE

$1-\sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{2n-1}\frac{x^{2n}}{2^{2n}}$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*, \mathbb{P}(T=n) = \frac{\binom{2n}{n}}{2n-1}\times\frac{1}{2^{2n}}$.

Ex 121 (fin).

$$\mathbb{P}(T=2n) = \frac{(2n)!}{(n!)^2(2n-1)} \times \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{(2n)^{2n} e^{-2n}\sqrt{4n\pi}}{(n^n e^{-n}\sqrt{2n\pi})^2\, 2n} \times \frac{1}{2^{2n}}$$ inutile.

$$\mathbb{P}(T=2n) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, n^{3/2}}$$ donc $\sum \mathbb{P}(T=n)$ conv. On le sait déjà !

La série entière $\sum \mathbb{P}(T=n)\, x^n$ conv norm sur $[0,1]$

donc la somme est cont en 1 : $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(T=n) = \lim_{x \to 1} (1-\sqrt{1-x^2}) = 1.$

~~Aussi~~ $(T<+\infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}^{\text{disj dén}} (T=n)$ donc $\mathbb{P}(T<+\infty)=1.$

g. $\mathbb{E}(T) < +\infty \iff G_T$ est dér en 1.

$$\frac{G_T(t)-G_T(1)}{t-1} = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t-1} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{1-t} = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \xrightarrow[t \to 1^-]{} +\infty$$

donc G_T n'est pas dér en 1. $\boxed{\mathbb{E}(T)=+\infty}$.