Samedi 8 juin 2024

144. $1000\,000 = 2^6 5^6$.

Les div sont les $2^i 5^j$, $0 \leq i \leq 6$, $0 \leq j \leq 6$.

Nb div $= 7 \times 7 = 49$.

nb div de $p_1^{\alpha_1} \cdots p_\ell^{\alpha_\ell} = (\alpha_1+1)\cdots(\alpha_\ell+1)$.

---

145. $a_1 < \dots < a_n \leftarrow$ les Éléments de A.

① Dans $A+A$, on trouve :

$$\underbrace{a_1+a_1 < a_1+a_2 < \dots < a_1+a_n}_{n} < \underbrace{a_2+a_n < \dots < a_n+a_n}_{n-1}$$

donc $\operatorname{Card}(A+A) \geqslant 2n-1$. Si $A = \{1, 2, \dots, n\}$, le minorant est optimal.

$A+A = [\![2, \dots, 2n]\!]$, de card $2n-1$.

Dans $A+A$, on trouve les $a_i + a_j$, où $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$

et rien d'autre. ~~Au plus~~ Le nombre de tels couples (i,j)

vaut $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \underset{\uparrow \text{nb de choix de } i}{j} = \frac{n(n+1)}{2}$ donc $\operatorname{Card}(A+A) \leqslant \frac{n(n+1)}{2}$.

On peut choisir $a_1, \dots, a_n$ de sorte que les $a_i + a_j$ soient tous distincts :

$1, 2, 4, \dots, 2^{n-1}$ (unicité du dév binaire).

② ~~Card~~ Même rais : $\operatorname{Card}(kA) \geqslant \operatorname{Card}((k-1)A) + n - 1$

Par réc : $\operatorname{Card}(kA) \geqslant kn - k + 1$.

Si $A = [\![1, n]\!]$, $kA = [\![k, kn]\!]$, de card $kn-k+1$. Optimal.

De même, $\operatorname{Card}(kA) \leq \operatorname{Card}\left(\left\{(i_1, \dots, i_k) \in [\![1,n]\!]^k \text{ tq } i_1 \leq \dots \leq i_k\right\}\right)$

En posant $j_1 = i_1 + 1$, $j_2 = i_2 + 2$, …, $j_k = i_k + k$, ça éq à

$2 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_k \leq n+k \longrightarrow \text{card} = \binom{n+k-1}{k}$.

Ex 146. $x_1, \dots, x_{13}$. Posons $y_i = \text{Arctan}(x_i)$.

$$\frac{x_i - x_j}{1 + x_i x_j} = \frac{\tan(y_i) - \tan(y_j)}{1 + \tan(y_i)\tan(y_j)} = \tan(y_i - y_j).$$

Posons $\alpha = \text{Arctan}(2-\sqrt{3})$.

$$\tan(2\alpha) = \frac{(2-\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})}{1 - (2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{-3 + 4\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

donc $\alpha = \frac{\pi}{12}$. Le but est de montrer que parmi les éléments $y_1, \dots, y_{13}$ de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, il y a $i \neq j$ tq $0 \leq y_i - y_j \leq \frac{\pi}{12}$.

En imaginant que $y_1 < y_2 < \dots < y_{13}$ et $\forall i \; y_{i+1} - y_i > \frac{\pi}{12}$, on trouve $y_{13} - y_1 > \frac{13\pi}{12} > \left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$ impossible.

Ex 148.

X = rang du 1^{er} pile $\quad X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

$X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. $\quad P(X=k) = (1-p)^{k-1}p$.

~~Sa~~ ~~La loi cond de~~ $\quad Y = \begin{cases} 1 & \text{si victoire} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Sachant $(X=k)$, la loi du nombre de ~~victoires~~ 6 est $\mathcal{B}(k, \frac{1}{6})$.

$$\mathbb{P}(Y=1 \mid X=k) = \binom{k}{1}\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = k\,\frac{5^{k-1}}{6^k}.$$

$$\mathbb{P}(Y=1) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k)\,\mathbb{P}(Y=1 \mid X=k) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{5(1-p)}{6}\right)^{k-1}\frac{p}{6}.$$

$\forall x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$. $\quad$ dét terme à terme $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

$$\mathbb{P}(Y=1) = \frac{p}{6} \times \frac{1}{\left(1-\frac{5}{6}(1-p)\right)^2} = \frac{6p}{(6-5(1-p))^2} = \frac{6p}{(1+5p)^2}.$$ noté $f(p)$ (sans le 6)

$f(p) = \cancel{6}p(1+5p)^{-2}$. $\quad f'(p) = \cancel{6}\left[(1+5p)^{-2} - 10p(1+5p)^{-3}\right]$

$f'(p) = (1+5p)^{-3}\left[1-5p\right]$.

p	0	$1/5$	1
$f(p)$	$\nearrow$		$\searrow$

proba max de victoire $= 6 f(1/5) = \dfrac{6/5}{2^2} = \dfrac{3}{10}$.

151. a. Bienaymé-Tchebyshev :

$$\mathbb{P}(|A_\lambda - \underbrace{\mathbb{E}(A_\lambda)}_{=\lambda}| \geq \varepsilon\lambda) \leq \frac{\mathbb{V}(A_\lambda)}{(\varepsilon\lambda)^2} = \frac{\lambda}{(\varepsilon\lambda)^2} = \frac{1}{\varepsilon^2\lambda} \longrightarrow 0$$

b. L'événement ~~se~~ réécrit $E_\lambda =$ « $B_\lambda^2 - 4A_\lambda C_\lambda \geq 0$ ».

$$E_\lambda = [\, B_\lambda^2 \geq 4A_\lambda C_\lambda \,].$$

Soit $\omega \in \Omega$, si $|A_\lambda(\omega) - \lambda| \leq \varepsilon\lambda$ et $|C_\lambda(\omega) - \lambda| \leq \varepsilon\lambda$,

alors $A_\lambda(\omega) \geq (1-\varepsilon)\lambda$ et $C_\lambda(\omega) \geq (1-\varepsilon)\lambda$. (on prend $\varepsilon \in]0,1[$)

puis $B_\lambda^2(\omega) \geq 4(1-\varepsilon)^2\lambda^2$ puis $B_\lambda(\omega) \geq 2(1-\varepsilon)^2\lambda$

puis $B_\lambda(\omega) - \lambda \geq (2(1-\varepsilon)^2 - 1)\lambda$.

$2(1-\varepsilon)^2 - 1 = 1 - 4\varepsilon + 2\varepsilon^2 = 1 - 4\varepsilon(1-\frac{\varepsilon}{2})$.

~~Prenons $\varepsilon = 1/2$.~~

~~$1 - 2\varepsilon(1-\varepsilon) = 1/2$~~

Prenons $\varepsilon = 1/4$.

$1 - 4\varepsilon(1-\varepsilon/2) = 1/8$

donc $B_\lambda(\omega) - \lambda \geq \frac{1}{8}\lambda$ donc $|B_\lambda(\omega) - \lambda| \geq \frac{1}{8}\lambda$.

Ainsi, $E_\lambda \cap (|A_\lambda - \lambda| \leq \frac{\lambda}{4}, |C_\lambda - \lambda| \leq \frac{\lambda}{4}) \subset (|B_\lambda - \lambda| \geq \frac{\lambda}{8})$

donc $E_\lambda \subset (|A_\lambda - \lambda| \geq \frac{\lambda}{4}) \cup (|C_\lambda - \lambda| \geq \frac{\lambda}{4}) \cup (|B_\lambda - \lambda| \geq \frac{\lambda}{8})$

$$0 \leq \mathbb{P}(E_\lambda) \leq \mathbb{P}(\ \downarrow\ ) + \mathbb{P}(\ \downarrow\ ) + \mathbb{P}(\ \downarrow\ )$$

donc $\mathbb{P}(E_\lambda) \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$.

Ex 152.

Éq carac : $r^2 + (A-1)r + B = 0$.

Discr $\Delta = (A-1)^2 - 4B$.

1er cas : $A = 1$. sol$^{\text{ns}}$ oscillantes : pas de lim nulle.

2e cas : $A > 1$ et $\Delta = 0$. $t \longmapsto (\alpha t + \beta) e^{-\frac{(A-1)}{2}t}$

lim nulle.

3e cas : $A > 1$ et $\Delta > 0$. 2 rac réelles λ_1 et λ_2 de prod > 0 et de somme < 0 donc $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$.

$$\alpha e^{\lambda_1 t} + \beta e^{\lambda_2 t} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0.$$

4e cas : $A > 1$ et $\Delta < 0$. $\lambda_1 = -\frac{1}{2}(A-1) + i\sqrt{-\Delta}$, $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$.

$$e^{-\frac{1}{2}(A-1)t}\left(\alpha \cos(\sqrt{-\Delta}\, t) + \beta \sin(\sqrt{-\Delta}\, t)\right)$$ lim nulle.

« limite nulle en $+\infty$ » $= (A > 1)$.

proba $= 1 - \mathbb{P}(A = 1) = 1 - p$.