Mardi 11 juin 2024 – séries entières.

Ex 82.

si $r \in [0, R[$, $a_n r^n \longrightarrow 0$

si $r > R$, $a_n r^n \not\longrightarrow 0$.

si $x \in [0, \sqrt{R}[$, $a_n x^{2n} \longrightarrow 0$

si $x \geq \sqrt{R}$, non

$\Big\}$ $R\left(\sum a_n x^{2n}\right) = \sqrt{R}$.

si $x \in [0, R^2[$, $a_n^2 x^n = \left(a_n \sqrt{x}^n\right)^2 \longrightarrow 0$

si $x > R^2$, non

$\Big\}$ $R\left(\sum a_n^2 x^n\right) = R^2$.

---

si $r > 1$, $r^n \geq R+1$ à partir d'un certain rang

donc $|a_n r^{n^2}| \geq |a_n| (R+1)^n$ (ne tend pas vers 0).

si $0 \leq r < 1$, $0 \leq r^n \leq \frac{R}{2}$ à partir d'un certain rang

puis $|a_n r^{n^2}| \leq |a_n| \left(\frac{R}{2}\right)^n \longrightarrow 0$.

$R\left(\sum a_n x^{n^2}\right) = 1$.

Ex 87. Soit $x > 0$.

$$\frac{n^n x^n}{3^{n^2}} = \exp\Big[\overbrace{n\ln(n) + n\ln(x) - n^2\ln(3)}^{\longrightarrow -\infty}\Big] \longrightarrow 0.$$

Rayon $= +\infty$.

Ex 88 : $\dfrac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)} \sim \dfrac{x^{2n+2}}{n^3}$.

$R\left(\sum \dfrac{z^n}{n^3}\right) = 1$ donc $\dfrac{x^{2n}}{n^3}$ $\begin{cases} \to 0 & \text{si } 0 \leq x^2 < 1 \\ \to \text{non} & \text{si } x^2 > 1. \end{cases}$

posit

$R = 1.$

$$\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{\frac{1}{1\times 1}}{n} + \frac{\frac{1}{-1\times(-1)}}{n+1} + \frac{\frac{1}{-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}}{2n+1}$$

$$= \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2n+1}.$$

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n+1} - 4\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1}.$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} = -\ln(1-x) \quad / \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2l+1}}{2l+1} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k} - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^{2l}}{2l}$$

$$= -\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2) = -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x).$$

$$f(x) = -x^2\ln(1-x^2) - \ln(1-x^2) - x^2 - 4x\left(-\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x)\right)$$

Ex 83. 1. Réc forte.

2.1. $|a_n| \leq 1$ par réc forte : si $|a_0|, \dots, |a_{n-1}| \leq 1$,

$$|a_n| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2}(e-1) \leq 1.$$

2.2. $$e^z f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n-k}}{k!} \right) z^n$$

$n=0$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \Big(\underset{k=0}{a_n} \quad \underbrace{-2a_n}_{k:1\to n} \Big) z^n + 1$$

$$= -\left(f(z) - 1\right) + 1 = 2 - f(z)$$

donc $f(z)(e^z + 1) = 2$. Ainsi, $|z| < R \Rightarrow e^z + 1 \neq 0$

donc $R \geq \pi$.

Ex 86. $c_n(r) \overset{\text{déf}}{=} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) e^{-int}\, dt$.

a. $$c_n(r) = \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \underbrace{a_k r^k e^{ikt} e^{-int}}_{g_k(t)} \right) dt$$

$\|g_k\|_\infty = |a_k| r^k$

$\sum |a_k| r^k$ conv

$\to$ on peut int terme à terme

$$c_n(r) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)t}\, dt}_{= \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq n \\ 2\pi & \text{si } k = n \end{cases}} = 2\pi a_n r^n.$$

b. Hyp : $|f| \leq c$. Alors $|c_n(r)| \leq 2\pi$ et ce pour tout $r > 0$.

donc $|a_n| \leq \frac{1}{r^n}$

on fait tendre r vers $+\infty$: si $n \geq 1$, $|a_n| = 0$.

Ex 84.

(1) $T_0 = 1, \qquad T_{n+1} = X(T_n + T_n')$.

$$T_1 = X, \qquad T_2 = X(X+1) = X^2 + X$$

$$T_3 = X(X^2+X+2X+1) = X^3+3X^2+X$$

$$T_4 = X(X^3+3X^2+X+3X^2+6X+1) = X^4+6X^3+7X^2+X.$$

(2) Réc. $X\sum_{k=0}^{0}\binom{0}{k}T_k(X) = X = T_1(X)$.

Soit n tq. $T_{n+2}(X) = T_{n+1}(X) + T_{n+1}'(X)$

$$= X\left[X\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T_k(X) + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T_k(X) + X\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T_k'(X)\right]$$

$$= X\left[\underbrace{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T_{k+1}(X)}_{l=k+1} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}T_k(X)\right]$$

$$= X\left[\sum_{l=1}^{n+1}\binom{n}{l-1}T_l(X) + \sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}T_l(X)\right]$$

$$= X\left[T_{n+1}(X) + \sum_{l=1}^{n}\binom{n+1}{l}T_l(X) + T_0(X)\right]$$

$$= X\sum_{l=0}^{n+1}\binom{n+1}{l}T_l(X).$$

Voilà.

Ex 84 (suite).

3. Réc. $T_0(e^t)\,\phi(t) = \phi(t) = \phi^{(0)}(t)$. $= e^t\phi(t)$

Soit n tq. $\forall t \in \mathbb{R},\ \phi^{(n+1)}(t) = e^t T_n'(e^t)\phi(t) + T_n(e^t)\phi'(t)$

$= e^t\left(T_n'(e^t) + T_n(e^t)\right)\phi(t) = T_{n+1}(e^t)\phi(t)$.

4. $\forall t \in \mathbb{R},\ \phi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{nt}}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n!k!}(nt)^k$.

$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{1}{n!k!}n^k t^k\right| = \phi(|t|) < +\infty$ donc on peut fubinir :

$\phi(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}\right)}_{\text{noté } a_k} t^k$. ϕ est DSE sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Sauf que c'est pas du tout ça qui est demandé !}}$

$\phi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{e^{nt}}{n!}$ noté $u_n(t)$. $u_n^{(k)}(t) = \frac{n^k}{n!}e^{nt}$.

$\|u_n^{(k)}\|_{\infty,]-\infty, a]} = \frac{n^k}{n!}e^{na}$ $\frac{\|u_{n+1}^{(k)}\|_\infty}{\|u_n^{(k)}\|_\infty} = \frac{e^a\left(1+\frac{1}{n}\right)^k}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1$

conv d'Alembert.

$\sum u_n^{(k)}$ conv norm pour tout k : on peut appliquer sur $]-\infty, a]$, le th de dér terme à terme à tous les ordres. (+ local → global)

$\forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N},\ \phi^{(k)}(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}e^{nt}$ donc $T_n(e^t)e^{e^t} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}(e^t)^n$.

Ainsi ! $\forall x > 0,\ T_n(x)e^x = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^k}{n!}x^n$. Le dév est celui-ci.

Par prod de Cauchy, $x \mapsto T_n(x)e^x$ est DSE sur $\mathbb{R}$.

5. $E(X^k) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k P(X=n) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^k e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = T_n(\lambda)$.

Ex 85. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

Hyp. $R\left(\sum a_n x^n\right) > 0$ noté R.

On déf $f :]-R,R[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

dérivation terme à terme : $\forall x \in]-R,R[$, $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n$

$\forall x \in]-R,R[$, $f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$.

surtout pas

$x(x-1)f''(x) + 3xy'(x) + y(x) =$

$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$n(n-1) + 3n + 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

$k = n-1$.

$= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_n x^n - \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)k\, a_{k+1} x^k$

f sol de (E) sur $]-R,R[\iff \forall k \in \mathbb{N}$, $k(k+1)a_{k+1} = (k+1)^2 a_k$

ceci a lieu.

Analyse. On suppose que f est sol donc $a_0 = 0$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $a_{k+1} = \frac{k+1}{k} a_k$, c'est-à-dire $\forall \ell \geq 2$, $\frac{a_\ell}{\ell} = \frac{1}{\ell-1} a_{\ell-1}$

La suite $\left(\frac{a_\ell}{\ell}\right)_{\ell\geq 1}$ est constante, de valeur a_1 : $\forall \ell \geq 1$, $a_\ell = a_1 \ell$.

Ainsi : $\forall x \in]-R,R[$, $f(x) = a_1 \sum_{k=1}^{+\infty} \ell x^n = a_1 \times \frac{x}{1-x}$.

Synthèse. $x \longmapsto a_1 \frac{x}{1-x}$ est DSE sur $]-1,1[$ et ses coefs vérifient ceci

donc elle est solution.

Mercredi 12 juin 2024

Ex 51. 1. Classique. 2. Idem.

3. $\mathrm{Ker}(\varphi) = \varphi^{-1}(\{0\})$ $\begin{cases} \{0\} \text{ est fermé} \\ \varphi \text{ est cont} \end{cases}$ donc $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est fermé.

4. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Soit $d \geq \deg(P)$. On pose $Q_d = \sum_{n=0}^{d} \frac{1}{2^n}$.

$\varphi(P) = (P|Q_d)$ donc $|\varphi(P)| \leq \|P\| \times \|Q_d\|$ (Cauchy-Schwarz)

$$\|Q_d\|^2 = \sum_{n=0}^{d} \frac{1}{2^{2n}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = 4/3$$

donc $|\varphi(P)| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \|P\|$. φ est lipsch (donc cont) donc H est fermé.

5. $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \{a\}^\perp$. $\{a\}^\perp$ est le noyau de $x \mapsto (x|a)$, qui est $\|x\|$-lipsch.

$A^\perp$ intersec de fermé donc fermé

$(A^\perp)^\perp$ est donc fermé. $\forall a \in A, \forall b \in A^\perp, (a|b) = 0$

donc $A \subset (A^\perp)^\perp \longrightarrow$ c'est un fermé qui contient A donc $\mathrm{Adh}(A) \subset (A^\perp)^\perp$.

6. On pose $|||P||| = \sup \left\{ \frac{|\varphi(P)|}{\|P\|} ; P \in E \setminus \{0\} \right\}$.

$|||P||| \leq \frac{2}{\sqrt{3}}$ d'après Q4.

$\forall d \in \mathbb{N}$, $|||P||| \geq \frac{|\varphi(Q_d)|}{\|Q_d\|} = \|Q_d\|$ or $\|Q_d\| \xrightarrow[d \to +\infty]{} \frac{2}{\sqrt{3}}$

donc $|||P||| \geq \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Finalement, $|||P||| = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Ex 52. 1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$.

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix}\lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{bmatrix}$. On pose $B_p = P \begin{bmatrix}\lambda_1+\frac{1}{p} & & & * \\ & \lambda_2+\frac{2}{p} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n+\frac{n}{p}\end{bmatrix} P^{-1}$.

À partir d'un certain rang, les $\lambda_i + \frac{i}{p}$ sont tous distincts donc $B_p \in D_n(\mathbb{C})$. Cont prodmat : $B_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A$.

2. $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$. $\Delta(A)$ = discr de $\chi_A = (a+d)^2-4(ad-bc)$.

$\chi_A = X^2-(a+d)X+ad-bc$ Δ est continue.

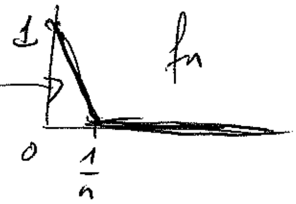
Analyse. Soit $A \in Adh(D_2(\mathbb{R}))$. $A = \lim_{p\to+\infty} \overbrace{B_p}^{\in D_2(\mathbb{R})}$

χ_{B_p} est scindé sur $\mathbb{R}$ donc $\Delta(B_p) \geq 0$.

$\Delta(A) = \lim_{p\to+\infty} \Delta(B_p) \geq 0$. Ainsi, A est trig.

Synthèse. Si A est trig, $A \in Adh(D_2(\mathbb{R}))$ par le même raisonnement que Q1.

Ex 54. 1. OK



2. $g_2(f_n) = \int_0^{\frac{1}{n}} e^t(1-nt)\,dt \leq e^{\frac{1}{n}}$ Aire() $= e^{\frac{1}{n}} \times \frac{1}{2n}$

donc $g_2(f_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,

$\forall f \in E$, $g_2(f) \leq e\, g_1(f)$ donc toute conv pour g_1 implique la même pour g_1. Si $f_n \xrightarrow{g_1} h$ alors $f_n \xrightarrow{g_2} h$ donc $h = 0$. Or $g_1(f_n) = 1$ donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ div pour g_1.

Ex 100. (1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$. $\chi_A = X^2 - \cancel{2}X - 8 = (X-4)(X+2)$.

$A - 4I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -7 & -7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -7 \end{bmatrix}$ B.

$A + 2I_2 = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -7 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix}$. $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

(2) $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

$(S) \iff X'' = AX \iff X'' = PBP^{-1}X \iff P^{-1}X'' = BP^{-1}X$.

On pose $Y = P^{-1}X$. $(S) \iff Y'' = BY \iff \begin{cases} y_1'' = 4y_1 \\ y_2'' = -2y_2 \end{cases}$

$(S) \iff \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = ae^{2t} + be^{-2t} \\ y_2(t) = c\cos(\sqrt{2}\,t) + d\sin(\sqrt{2}\,t). \end{cases}$

$X = PY = y_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + y_2\begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ -y_1 - 7y_2 \end{pmatrix}$.

$(S) \iff \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x(t) = ae^{2t} + be^{-2t} + c\cos(\sqrt{2}t) + d\sin(\sqrt{2}\,t) \\ y(t) = -ae^{2t} - be^{-2t} - 7c\cos(\sqrt{2}t) - 7d\sin(\sqrt{2}\,t). \end{cases}$

Ex 101. $y' = -\frac{1}{x^2}y \longrightarrow Ae^{1/x}$.

On pose $g : x \longmapsto e^{-1/x}f(x)$. $\forall x > 0, g'(x) = e^{-1/x}\left[f'(x) + \frac{1}{x^2}f(x)\right]$.

f est sol $\iff \forall x > 0, g'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x > 0, g(x) = e^{-1/x} + C$

$\iff \exists C \in \mathbb{R}, \forall x > 0, f(x) = 1 + Ce^{1/x}$.

$x \longmapsto 1$ est sol sur $\mathbb{R}$.

Ex 102.

Soit $y \in \mathcal{C}^2(]0,+\infty[,\mathbb{R})$. On pose $z : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & y(e^t) \end{array}$.

z est de classe $\mathcal{C}^2$.

$\forall x>0, \quad y(x) = z(\ln(x))$.

$\forall x>0, \quad y'(x) = \frac{1}{x} z'(\ln(x))$.

$\forall x>0, \quad y''(x) = -\frac{1}{x^2} z'(\ln(x)) + \frac{1}{x^2} z''(\ln(x))$

$$x^2 y''(x) + y(x) = \underbrace{z''(\ln(x)) - z'(\ln(x)) + z(\ln(x))}_{=0}.$$

y sol $\Leftrightarrow \forall x>0,$

$\Leftrightarrow \forall t\in\mathbb{R}, \quad z''(t) - z'(t) + z(t) = 0$

$\Leftrightarrow \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2, \ \forall t\in\mathbb{R}, \ z(t) = e^{\frac{t}{2}}\left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right)$

$\Leftrightarrow \exists (a,b)\in\mathbb{R}^2, \ \forall x>0, \ y(x) = \sqrt{x}\left(a\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln(x)\right)\right).$

Jeudi 13 juin 2024

Ex 103.

1. $(1-\sqrt{xy})^2 - (1-x)(1-y) = \left[1 - 2\sqrt{xy} + xy\right] - \left[1 - x - y + xy\right]$
$= x + y - 2\sqrt{xy} = (\sqrt{x} - \sqrt{y}) \geq 0.$

2. $\begin{cases} 0 \leq f(x,y) \leq xy\sqrt{(1-x)(1-y)} \\ \text{si } (x,y) \neq (1,1) \end{cases}$ donc $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(1,1)]{} 0 = f(1,1).$ $=0.$

3. f est cont sur $[0,1]^2$ fermé borné donc f a un max et un min.
$U =]0,1[^2$ ouvert. f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1-y) \times \frac{(1-2x)(1-xy) - (-y)x(1-x)}{(1-xy)^2} = \frac{y(1-y)}{(1-xy)^2}(1 - 2x + x^2y).$$

num $= 1 - 2x - xy + 2x^2y + xy - x^2y = 1 - 2x + x^2y$ $\quad xy+2 \neq 0$

$(x,y) \in U$ pt crit de f $\iff \begin{cases} 2x - x^2y = 1 \\ 2y + xy^2 = 1 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \begin{cases} 2x - x^2y = 1 \\ 2(y-x) + xy(y-x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - x^3 = 1 \\ x = y \end{cases}$

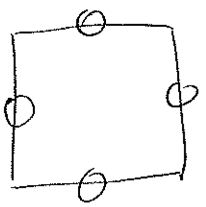
$X^3 - 2X + 1 = \cancel{(X+1)(X^2 - X - 1)}$
$(X-1)(X^2 + X - 1)$ $\longrightarrow$ racines -1, $\cancel{\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}}$ $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

La seule dans $]0,1[$ est $x_0 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Unique pt critique (x_0, x_0). $\quad 1 - x_0 = x_0^2$.

$f(x_0, x_0) = \frac{x_0^2(1-x_0)^2}{1 - x_0^2} = x_0^5.$

$1 - x_0^2 = x_0.$



Le max de f est atteint sur Contour $\cup \{(x_0,x_0)\}$.
f est nulle sur le contour donc $\max\limits_{[0,1]^2} f = x_0^5$.

106. **1.** Voilà, quoi.

2. $\sin(x+iy) = \dfrac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} = \dfrac{e^{-y}(\cos(x)+i\sin(x)) - e^{y}(\cos(x)-i\sin(x))}{2i}$

$\sin(x+iy) = \mathrm{ch}(y)\sin(x) + i\,\mathrm{sh}(y)\cos(x)$.

$$f(x,y) = \mathrm{ch}^2(y)\sin^2(x) + \mathrm{sh}^2(y)\cos^2(x)$$

$$= \left(\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\right)^2\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{2\mathrm{ch}(2y)+2}{4} \times \frac{2\cos(2x)-2}{4} + \frac{2\mathrm{ch}(2y)-2}{4} * \frac{2\cos(2x)+2}{4}$$

$$= \frac{\mathrm{ch}(2y)-\cos(2x)}{2}.$$

3. $\mathrm{ch}(2y) \geq 1 \geq \cos(2x)$. $\quad f(x,y) \geq 0 = f(0,0)$.

4. Boule fermée.

5.1. $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est cont.

5.2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \sin(2x)$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \mathrm{sh}(2y)$. $\quad (0,0)$ unique pt cst !

Le max est donc réalisé sur le contour.

5.3. $g(\theta) = \dfrac{\mathrm{ch}(2\sin(\theta)) - \cos(2\cos(\theta))}{2}$

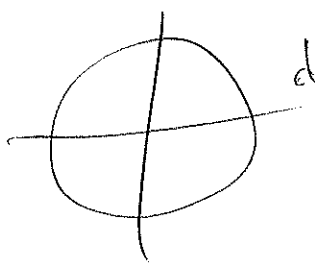
6. $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $g'(\theta) = \underbrace{\cos(\theta)}_{\geq 0}\,\mathrm{sh}(2\sin(\theta)) - \sin(\theta)\sin(2\cos(\theta))$

$\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. $\quad \cos(\theta) \geq 0$, $\sin(\theta) \geq 0$

$\left.\begin{array}{l}\cos(\theta)\,\mathrm{sh}(2\sin(\theta)) \geq 2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\sin(2\cos(\theta)) \leq 2\sin(\theta)\cos(\theta)\end{array}\right\} g'(\theta) \geq 0.$

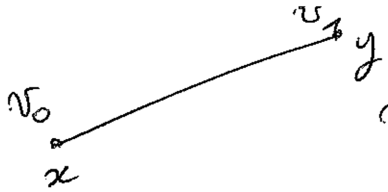
$\max_{[0,\frac{\pi}{2}]} g = g(\pi/2) = \dfrac{\mathrm{ch}(2)-1}{2}$.

c'est $\max_{D} g$.



double parité

Ex 108.



$v_t = x + t(y-x)$.

$$g(t) \overset{\text{déf}}{=} f(v_t) = f(x + t(y-x)).$$

$$g'(t) = \langle y - x \mid \nabla f(x+t(y-x)) \rangle$$

$$|g'(t)| \leqslant \|y-x\| \times \underbrace{\|\nabla f(x+t(y-x))\|}_{\leqslant \sqrt{1^2+\dots+1^2} = \sqrt{n}}$$ Cauchy-Schwarz

$$\underset{\substack{\| \\ |f(x)-f(y)|}}{|g(1) - g(0)|} \leqslant \sqrt{n}\ \underset{\to \|y-x\|}{(1-0)}$$

Ex 110.

Analyse. Soit f une sol.

Soit $y \in \mathbb{R}$. La fonction $f_{1,y} : x \longmapsto f(x,y)$ est de dér nulle donc elle est cste : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = f(0,x)$

$y \longmapsto f(0,x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Synthèse. On suppose qu'il existe $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tq $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \varphi(y)$.

Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

Ex 112.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$f(x,y) = (a,b) \iff \begin{cases} x+y = a \\ x^7 - y^7 = b \end{cases} \iff \begin{cases} y = a-x \\ x^7 - (a-x)^7 = b \end{cases}$$

$f_a(x) = x^7 + (x-a)^7$.

f_a est cont sur $\mathbb{R}$, str cr, $f_a(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, $f_a(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty$ donc f_a bij.

$$f(x,y) = (a,b) \iff \begin{cases} y = a - f_a^{-1}(b) \\ x = f_a^{-1}(b) \end{cases}.$$

f est bij.

Ex 111.

$$\begin{cases} u = x \\ v = y e^{x^2/2} \end{cases} \iff \begin{cases} x = u \\ y = v e^{-u^2/2} \end{cases}.$$

le ch de var est bij et de classe $\mathcal{C}^1$.

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. On définit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(u,v) \longmapsto f(u, v e^{-u^2/2})$.

g est de classe $\mathcal{C}^1$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = g(x, y e^{x^2/2})$.

$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(x, y e^{x^2/2}) + x y e^{x^2/2} \dfrac{\partial g}{\partial v}(x, y e^{x^2/2})$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{x^2/2} \frac{\partial g}{\partial v}(x, y e^{x^2/2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - xy \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x, y e^{x^2/2}).$$

f est sol $\iff \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial u}(x, y e^{x^2/2}) = 0$

$\iff \forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) = 0$

$\iff \exists \varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\forall (u,v) \in \mathbb{R}^2$, $g(u,v) = \varphi(v)$

$\iff$ ——————, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \varphi(y e^{x^2/2})$.

Ex 109.

$\forall (x,y,z) \in]0,+\infty[^3$ (noté U),

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x}{z^2} f'\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right), \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y,z) = \frac{2y}{z^2} f'\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z}(x,y,z) = -2\left(\frac{x^2+y^2}{z^3}\right) f'\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right).$$

$\forall (x,y,z) \in U$, $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x,y,z) = \frac{2}{z^2} f'\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right) + \frac{4x^2}{z^4} f''\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(x,y,z) = \frac{2}{z^2} f'\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right) + \frac{4y^2}{z^4} f''\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}(x,y,z) = 6\left(\frac{x^2+y^2}{z^4}\right) f'\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right) + 4\frac{(x^2+y^2)^2}{z^6} f''\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right).$$

$$\Delta\phi(x,y,z) = \left[\frac{4}{z^2} + 6\left(\frac{x^2+y^2}{z^4}\right)\right] f'\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right) + \left[4\,\frac{x^2+y^2}{z^4} + 4\frac{(x^2+y^2)^2}{z^6}\right] f''\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)$$

$$= \frac{4}{z^2}\left(\left[1 + \frac{3}{2}\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)\right] f'\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right) + \left[\frac{x^2+y^2}{z^2} + \left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)^2\right] f''\left(\frac{x^2+y^2}{z^2}\right)\right).$$

Quand (x,y,z) décrit U, $\frac{x^2+y^2}{z^2}$ décrit $]0,+\infty[$.

$$\Delta\phi = 0 \iff \forall t>0, \quad \left(1+\frac{3}{2}t\right) f'(t) + (t+t^2) f''(t) = 0.$$

$$\frac{1+\frac{3}{2}t}{t(t+1)} = \frac{1+t+\frac{1}{2}t}{t(1+t)} = \frac{1}{t} + \frac{1/2}{1+t} \longrightarrow \ln(t) + \frac{1}{2}\ln(1+t)$$

$\Delta\phi = 0 \iff \exists a \in \mathbb{R}, \ \forall t>0, \ f'(t) = a\, t\sqrt{1+t}$

$$(1+t)^{3/2} - (1+t)^{1/2} \xrightarrow{\text{prim}} \frac{2}{5}(1+t)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+t)^{3/2}$$

$$\iff \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2, \ \forall t>0, \ f(t) = a\left[\frac{2}{5}(1+t)^{5/2} - \frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\right] + b$$

Samedi 15 juin 2024

Ex 125. ① $\Leftarrow$ direct.

Hyp : $\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(f)$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, dashed] \arrow[dr, "v"'] & F \arrow[d, "f"] \\ & G \end{tikzcd}$$

$F = \mathrm{Ker}(f) \oplus F_1$ $\qquad \tilde{f} : \begin{array}{ccc} F_1 & \longrightarrow & \mathrm{Im}(f) \\ y & \longmapsto & f(y) \end{array}$ bij.

$\mathrm{Im}(v) \subset \mathrm{Im}(f)$ donc on peut appliquer $\tilde{f}^{-1}$ aux éléments de $\mathrm{Im}(v)$

et définir $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & \tilde{f}^{-1}(v(x)) \end{array}$, u est lin et $f \circ u = v$.

Hyp : $\mathrm{Im}(v) \subset I$.

② $\Leftarrow$ direct. ~~En~~ ~~On peut définir de même $\tilde{f}_i$~~

En concaténant des bases de $\mathrm{Im}(f_1), \dots, \mathrm{Im}(f_k)$, on obtient une famille génératrice de $\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(f_i)$, dont on peut extraire une base $\mathcal{B}$. Cette base extraite est la concaténée de familles $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_k$ où $\mathcal{B}_i$ est une famille libre de $\mathrm{Im}(f_i)$. Posons $F_i = \mathrm{Vect}(\mathcal{B}_i)$.

Alors $\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \mathrm{Im}(f_i)}_{\text{noté } I} = F_1 \oplus \dots \oplus F_k$ et $F_i \subset \mathrm{Im}(f_i)$.

Notons $p_1, \dots, p_k$ les proj associés.

Pour tout $y \in I$, $\quad y = \sum_{i=1}^{k} p_i(y)$.

$F = \mathrm{Ker}(f_i) \oplus F_i \qquad \tilde{f}_i : F_i \longrightarrow \mathrm{Im}(f_i)$ bij.

Pour tout $x \in E$, $v(x) \in I$ donc $v(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i(v(x))$

$p_i(v(x)) \in F_i$ donc $p_i(v(x)) = f_i(\tilde{f}_i^{-1}(\cancel{v(x)}\, p_i(v(x))))$

Ainsi, en posant $u_i = \tilde{f}_i^{-1} \circ p_i \circ v$, $\quad u_i \in \mathcal{L}(E, F)$

et $v = \sum_{i=1}^{k} f_i \circ u_i$.

Ex 130. (1) $t \mapsto \begin{bmatrix} e^{i\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{i\lambda_n t} \end{bmatrix}$ marche si $\lambda_k \in 2\pi\mathbb{Z}$,

ainsi que les matrices qui leur sont semblables.

(2) Soit A une telle application. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. $A\left(\frac{1}{k}\right)^k = A(1) = I_n$

donc $Sp(A(1/k)) \subset \mathbb{U}_k$ et $A(1/k)$ est diag.

$P_k^{-1} A(1/k) P_k = \begin{bmatrix} \omega_{1,k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_{n,k} \end{bmatrix}$ $\omega_{l,k} \in \mathbb{U}_k$: de la forme $e^{i\frac{2\pi}{k} m_{l,k}}$

$\omega_{1,k}^{l} = e^{i 2\pi m_{1,k} \frac{l}{k}}$

$P_k^{-1} A(l/k) P_k = \begin{bmatrix} \omega_{1,k}^{l} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \omega_{n,k}^{l} \end{bmatrix}$ si $l \in [\![0, k]\!]$.

Pour tout $q \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $A(q)$ est donc de cette forme.

De plus, pour un dénominateur k fixé, on peut choisir P_k commune à toutes les $A(l/k)$.

Il s'agirait de montrer qu'on peut choisir P commune à tous les $q \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.

À finir au tableau.

Ex 132.

$Sp(A) = \{a, c\} \subset]0, +\infty[$ $\quad 0 < a \leq c$.

$Sp(B) = \{b, d\}$, $\quad 0 < b \leq d$.

$$tr\left((A + sI_2)^{-1}\right) = \frac{1}{a+s} + \frac{1}{c+s}.$$

Ainsi : $\forall s > 0$, $\quad \frac{1}{a+s} + \frac{1}{c+s} = \frac{1}{b+s} + \frac{1}{d+s}$.

dén commun : $\forall s > 0$, $(a+c+2s)(b+s)(d+s) = (b+d+2s)(a+s)(c+s)$

Deux polynômes coïncident sur un ens infini donc sont égaux.

$$\cancel{\text{Ca}} \left(X + \frac{a+c}{2}\right)(X+b)(X+d) = \left(X + \frac{b+d}{2}\right)(X+a)(X+c).$$

$b, d, \frac{a+c}{2}$ sont donc les mêmes nombres que $a, c, \frac{b+d}{2}$ dans un certain ordre.

1^er^ cas : $b = d$. Alors $b = \frac{b+d}{2}$. $\quad d, \frac{a+c}{2}$ sont a et c.

Donc $\begin{cases} \frac{a+c}{2} = a \text{ ou } c \\ d = a \text{ ou } c \end{cases}$ donc $a = c$ et $d = (a \text{ ou } c)$ donc a, c, b, d sont égaux

si bien que $A = aI_2 = B$.

2^e^ cas : $b < d$. Alors $b < \frac{b+d}{2} < d$. De plus, $a < c$ (contraposée du 1^er^ cas)

donc $a < \frac{a+c}{2} < c$.

Forcément, $\frac{a+c}{2} = \frac{b+d}{2}$ et $\{b, d\} = \{a, c\}$.

$\min\{b, d\} = \min\{a, c\}$ donc $b = a$ et $d = c$.

A et B sont semblables à $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ donc semblables entre elles.

Ex 135.

Taylor - Lagrange : Soit $x>0$. $\forall h>0$, $\quad \left|f(x+h)-f(x)-hf'(x)\right| \leq \frac{h^2}{2}\|f''\|_{\infty,\mathbb{R}}$

puis $\quad |f'(x)| \leqslant \frac{h}{2}\|f''\|_{\infty,\mathbb{R}} + \frac{1}{h}\left|f(x+h)-f(x)\right|$

$$|f'(x)| \leq \frac{h}{2}\|f''\|_{\infty,\mathbb{R}} + \frac{2}{h}\|f\|_{\infty,[x,+\infty[}$$ — noté $g(x)$.

Étant donné $(a,b)\in\,]0,+\infty[^2$, on pose

$\varphi : t \longmapsto at + \frac{b}{t}$. $\qquad \varphi'(t) = a - \frac{b}{t^2} = \frac{at^2-b}{t^2}$.

t	0		$\sqrt{b/a}$	
$\varphi(t)$	||	$\searrow$		$\nearrow$

$$\min_{]0,+\infty[} \varphi = \varphi\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right) = 2\sqrt{ab}.$$

En choisissant bien h, on obtient $|f'(x)| \leqslant 2\sqrt{\|f''\|_{\infty,\mathbb{R}}\,\|f\|_{\infty,[x,+\infty[}}$

Étant donné $\varepsilon>0$, il existe $x_\varepsilon>0$ tq : $\forall x \geqslant x_\varepsilon$, $|f(x)|\leqslant\varepsilon$

donc $\forall x\geqslant x_\varepsilon$, $\|f\|_{\infty,[x,+\infty[} \leq \varepsilon$.

Ainsi, $\|f\|_{\infty,[x,+\infty[} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ puis $|f'(x)| \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Ex 142.

1. $$|g(x)\, A_t(f)(x)| = |g(x) f'(x) + t x f(x) g(x)|$$
$$\leq \frac{C}{(1+x^2)^2} + |t| \times D \times \frac{|x|}{(1+x^2)^2}.$$

2. Existence idem.
$$\int_{\mathbb{R}} A_t^*(g) f = -\int_{\mathbb{R}} g'(x) f(x)\,dx + t\int_{\mathbb{R}} x f(x) g(x)\,dx$$
$$\int_{\mathbb{R}} A_t(f) g = \int_{\mathbb{R}} f'(x) g(x)\,dx + t\int_{\mathbb{R}} x f(x) g(x)\,dx.$$
c'est juste une int par parties.

3. $$\int_{\mathbb{R}} A_t^* A_t(f)\, f = \int_{\mathbb{R}} A_t(f)^2 \geq 0.$$

4. $$A_t^* A_t(f)(x) = -\left[f''(x) + t x f'(x) + t f(x)\right] + t x\left[f'(x) + t x f(x)\right]$$
$$= -f''(x) + (-t + t^2 x^2) f(x).$$

Ainsi $\forall t \in \mathbb{R}$, $$\int_{\mathbb{R}} \left[-f''(x) f(x) + (-t + t^2 x^2) f(x)^2\right] dx \geq 0.$$
$$= t^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)^2\,dx - t\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 - \int f''(x) f(x)\,dx$$
int par parties
$$= t^2 \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)^2\,dx - t\int_{\mathbb{R}} f(x)^2\,dx + \int_{\mathbb{R}} f'(x)^2\,dx$$

discr ≤ 0 donc $$\left(\int_{\mathbb{R}} f(x)^2\right)^2 - 4\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)^2\,dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} f'(x)^2\,dx\right) \leq 0.$$