Mardi 18 juin 2024

Ex 8. $P_n = nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n$. $P_n(1)=0$

$P_n' = n(n+2)X^{n+1} - (n+2)(n+1)X^n + (n+2)$ $\qquad P_n'(1)=0$.

$P_n'' = n(n+1)(n+2)X^n - (n+2)(n+1)nX^{n-1}$ $\qquad P_n''(1)=0$.

Ainsi, $(X-1)^3 \mid P_n$.

Taylor : $P_n = \sum_{k=0}^{n+2} \frac{P_n^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k = \sum_{k=3}^{n+2} \frac{P_n^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^k$.

quotient $= \sum_{k=3}^{n+2} \frac{P_n^{(k)}(1)}{k!}(X-1)^{k-3}$.

si $k \geq 3$, $P_n^{(k)} = n \times \frac{(n+2)!}{(n+2-k)!}X^{n+2-k} - (n+2)\frac{(n+1)!}{(n+1-k)!}X^{n+1-k}$.

$P_n^{(k)}(1) = \frac{(n+2)!}{(n+2-k)!}\left[n - (n+2-k)\right] = \frac{(n+2)!}{(n+2-k)!}k$.

Ex 11. On note $B = A^{-1}$, $\boxed{\sum_{i=1}^{n} b_{s,i}\, a_{i,k} = \delta_{s,k}}$.

$\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} v_k = 0_E$. $\quad \Big| \sum_{i=1}^{n} b_{s,i} L_i$

$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{s,i}\, a_{i,k} v_k = 0_E$ donc $\sum_{k=1}^{n} \delta_{s,k} v_k = 0_E$ donc $v_s = 0_E$.

Ex 23 $A + YX^T = \underbrace{A}_{\text{inv}}(I_n + \underbrace{A^{-1}YX^T}_{\text{notée } M})$.

$\text{rg}(M) \leq 1$ donc $\chi_M = X^{n-1}(X - \text{tr}(M))$. $\quad = X^TA^{-1}Y$

$\det(tI_n - A^{-1}YX^T) = t^{n-1}(t - \text{tr}(A^{-1}YX^T))$

en -1 : $(-1)^n \det(I_n + A^{-1}YX^T) = (-1)^n(1 + X^TA^{-1}Y)$.

Ainsi, inv de $A+YX^T \iff 1 + X^TA^{-1}Y \neq 0$.

Ex 18. $M = \begin{pmatrix} 0 & -c & a \\ c & 0 & b \\ -a & -b & 0 \end{pmatrix}$, $M^2 = \begin{bmatrix} -c^2-a^2 & -ab & -bc \\ -ab & -b^2-c^2 & ac \\ -bc & ac & -a^2-b^2 \end{bmatrix}$

① $M^3 = \begin{bmatrix} 0 & & \\ -b^2c-c^3-a^2c & \text{etc} & \\ ac^2+a^3+ab^2 & & \end{bmatrix} = -\underbrace{(a^2+b^2+c^2)}_{\text{noté } \theta} M.$

Hyp : $\theta > 0$.

(sinon, $S_n = I_3$).

De plus, $M^{2k+1} = (-\theta)^{k-1} M^3 = (-\theta)^k M.$

② Réc.

③ $$S_n = I_3 + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{M^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{M^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$S_n = I_3 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-\theta)^{k-1}}{(2k)!} M^2 + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-\theta)^k}{(2k+1)!} M$$

$$S_n = I_3 - \frac{1}{\theta} \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (\sqrt{\theta})^{2k}}{(2k)!} M^2 + \frac{1}{\sqrt{\theta}} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^k \frac{(\sqrt{\theta})^{2k+1}}{(2k+1)!} M$$

$$S_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} I_3 - \frac{1}{\theta}\left(\cos(\sqrt{\theta}) - 1\right) M^2 + \frac{\sin(\sqrt{\theta})}{\sqrt{\theta}} M.$$

Ex 32. ① $\varphi(\mathrm{Id}_E) = 0$ donc $\det(\varphi) = 0$.

② Soit h un vect pr de φ associé à λ.

$g \circ h - h \circ g = \lambda h$

$\cancel{g \circ g \circ h - g \circ h \circ g = \lambda}$ $h \circ g \circ h - h^2 \circ g = \lambda h^2$

$g \circ h^2 - h \circ g \circ h = \lambda h^2$

par somme, $g \circ h^2 - h^2 \circ g = 2\lambda h^2$. $\varphi(h^2) = 2\lambda h^2$

Par itération $\varphi(h^4) = 4\lambda h^4$ puis : $\forall k \in \mathbb{N}, \varphi(h^{2^k}) = 2^k \lambda h^{2^k}$.

si h n'était pas nilp, φ admettrait une infinité de val pr, mais c'est impossible donc h est nilp.

Ex21.

$E_{i,j}E_{a,b} = \delta_{j,a}E_{i,b}$

1. $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}\,(g(E_{i,j})\ ;\ 1 \leq i,j \leq n\}$.

$D = \sum_{k=1}^{n} k\,E_{k,k}$ $\qquad DE_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} k\,E_{k,k}E_{i,j} = i\,E_{i,j}$

$E_{i,j}D = \sum_{k=1}^{n} k\,E_{i,j}E_{k,k} = j\,E_{i,j}$ donc $g(E_{i,j}) = (i-j)E_{i,j}$.

$\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Vect}(E_{i,j}\ ;\ 1 \leq i \neq j \leq n) = \{$ matrices de diag nulle$\}$.

2. Déjà vu : $\mathrm{Ker}(g) = \{$matrices diagonales$\}$.

3. $\mathcal{E}$ = base can. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{E}}(a) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

$a(e_1+\dots+e_n) = \lambda \times (e_1+\dots+e_n)$

$\hookrightarrow = \sum_{k=1}^{n} a(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$

$\Big\}$ $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) = (\lambda,\dots,\lambda)$ donc $a = \lambda\,\mathrm{Id}$.

4. A_n : « Toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diag nulle ».

A_1 est direct. Soit n ~~$\in \mathbb{N}^*$~~ ≥ 2 pour lequel A_{n-1} est vraie.

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$ tq $\mathrm{tr}(M) = 0$.

1er cas : $M \in \mathrm{Vect}(I_n)$. Alors $M = 0$ donc voilà.

2e cas : $M \notin \mathrm{Vect}(I_n)$. Il existe alors $U_1 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ tq (U_1, MU_1) soit libre. On pose $U_2 = MU_1$ et on complète en $(U_1,\dots,U_n)$ base de $M_{n,1}(\mathbb{R})$.

$U = [U_1|\dots|U_n]$. $\qquad U^{-1}MU$ est de la forme $\left[\begin{array}{c|c} 0 & * \\ 1 & \\ 0 & N \\ \vdots & \end{array}\right]$

où N est de trace nulle. On conclut avec A_{n-1}.

5. Conséquence de Q1.