Mercredi 19 juin 2024

Ex 60. On pose $y_n = x_n + \frac{1}{2} x_{n+1}$.

Pour faire apparaître un télescopage, on pose $q_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n x_n$.

Alors $\left(-\frac{1}{2}\right)^n y_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n x_n - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} x_{n+1} = q_n - q_{n+1}$.

$y_n \longrightarrow 1$ donc $\left(-\frac{1}{2}\right)^n y_n = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ donc $\sum |q_n - q_{n+1}|$ ~~inutile~~ converge.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée donc $\left(-\frac{1}{2}\right)^n x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$$q_n - q_N = \sum_{k=n}^{N-1} (q_k - q_{k+1}) = \sum_{k=n}^{N-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k y_k.$$

$N \to +\infty$:
$$\boxed{q_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k y_n.}$$

Puis $x_n = (-2)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k y_n$

On pose $\varepsilon_n = y_n - 1$. ($\varepsilon_n \longrightarrow 0$)

$$x_n = (-2)^n \underbrace{\sum_{k=n}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k}_{= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \times \frac{1}{1+1/2}} + (-2)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon_k.$$

$$x_n = \frac{2}{3} + (-2)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon_k.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tq : $\forall k \geq n_\varepsilon$, $|\varepsilon_k| \leq \varepsilon$.

Si $n \geq n_\varepsilon$, $\left|(-2)^n \sum_{k=n}^{+\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon_k\right| \leq 2^n \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = 2^n \times \frac{\varepsilon}{2^n} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2\varepsilon$

donc ceci tend vers 0 et $\boxed{x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3}.}$

Ex 62.

a. $f(t) = \ln(1+t)$. R_n = n-ième somme de Riemann de f sur $[0,1]$

donc $R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f = \left[(1+t)\ln(1+t) - (1+t)\right]_0^1 = \ln(2) - 1$.

$\longrightarrow \exp(\ln(2)-1)$.

b. $S_n = n \, \cancel{\prod_{k=1}} \exp(R_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{e} n$.

Ex 68. $g : x \longmapsto \mathrm{Arctan}(x-1) + \mathrm{Arctan}(x) + \mathrm{Arctan}(x+1)$ est cont, str cr, de limites $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$ donc elle réalise une bij de $\cancel{\ }$ $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\longrightarrow$ unique sol r.

$g(0) = 0$. $g(1) = \frac{\pi}{4} + \mathrm{Arctan}(2) > \frac{\pi}{2}$ donc $r \in]0,1[$.

Rappel : $1 + iy = \sqrt{1+y^2}\, e^{i\,\mathrm{Arctan}(y)}$.

$\frac{\pi}{2}$ est donc un argument de $(1+i(r-1))(1+ir)(1+i(r+1))$ noté z.

$(1+i(r-1))(1+i(r+1)) = 1-(r^2-1) + 2ir = (2-r^2) + 2ir$.

$z = (1+ir)((2-r^2)+2ir) = (2-r^2-2r^2) + i(2r-r^3+2r)$

$= (2-3r^2) + i(4r-r^3)$.

Ainsi, $\begin{cases} 2-3r^2 = 0 \\ 4r - r^3 > 0 \end{cases}$ (on sait déjà que $0<r<1$).

Finalement, $r = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

Ex 63. La condition se réécrit :

~~Analyse :~~ $\forall x \in [0,1]$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{f(x)-f(x^n)}{2^n} = 0.$

Soit $r \in]0,1[$. Par le th des bornes atteintes, il existe $x_r \in [0,r]$ tq $\displaystyle\max_{[0,r]} f = f(x_r)$. $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \underbrace{\frac{f(x_r)-f(x_r^n)}{2^n}}_{\geq 0} = 0$

donc $\forall n \in [\![2,+\infty[\![$, $f(x_r^n) = f(x_r)$. $x_r \in]0,1[$ donc $x_r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

f est cont donc $f(x_r^n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(0)$. Ainsi, $f(x_r) = f(0)$.

Le même raisonnement avec le min donne $\displaystyle\min_{[0,r]} f = f(0)$

donc $\forall t \in [0,r]$, $f(t) = f(0)$.

On l'a obtenu pour tout $t \in]0,1[$ donc $\forall t \in [0,1[$, $f(t) = f(0)$.

f est cont en 1 donc $f(1) = f(0)$ aussi.

Synthèse. Les fonctions constantes sont sol.

Ex 94. $f_n(t) = \dfrac{1}{(1+t)(2+t)\cdots(n+t)} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{k+t}$, avec $\alpha_k = \dfrac{1}{(-k+1)\cdots(-k+k-1)(-k+k+1)\cdots(-k+n)}$

Existence $\iff n \geq 2$.

$\alpha_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!(n-k)!} = \dfrac{1}{(n-1)!} \underbrace{(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}}_{\text{noté } \beta_k}$. $f_n(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^n}$.

$\displaystyle\int_0^A f_n(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_0^A \frac{dt}{k+t} = \frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n} \beta_k \left[\ln(A+k) - \ln(k)\right].$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \beta_k = \sum_{l=0}^{n-1} (-1)^l \binom{n-1}{l} = (1-1)^{n-1} = 0$ (car $n-1>0$).
$l=k-1$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \beta_k \ln(A+k) = \ln\Big[\underbrace{\prod_{k=1}^{n} (A+k)^{\beta_k}}_{\text{ceci tend vers } 1}\Big]$

$$\int_0^{+\infty} f(t)\,dt = -\frac{1}{(n-1)!}\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \ln(k) (-1)^{k-1}.$$