

Devoir de vacances de mathématiques — PC*
Problème 1 — intégrales de Wallis et équivalent de Stirling (*)

Pour tout entier naturel n , on pose $W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n(t) dt$.

Le but de ce problème est de calculer cette intégrale et d'étudier la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis d'en déduire un équivalent de $n!$ quand n tend vers $+\infty$.

Première partie : les calculs classiques sur les intégrales de Wallis

Question 1. Montrer que la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et que tous ses termes sont strictement positifs.

Question 2. Calculer les intégrales W_0 et W_1 .

Question 3. Au moyen d'une intégration par parties, obtenir la relation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n.$$

Question 4. Pour tout n dans \mathbb{N} , prouver l'encadrement suivant

$$\frac{n+1}{n+2} W_n \leq W_{n+1} \leq W_n.$$

Question 5. Montrer que la suite $((n+1)W_n W_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et préciser la valeur de cette constante.

Question 6. Montrer que W_n est équivalent à $\sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 7. Pour tout p dans \mathbb{N} , prouver les relations suivantes

$$W_{2p} = \frac{\pi}{2} \times \frac{(2p)!}{2^{2p} \times (p!)^2} \quad \text{et} \quad W_{2p+1} = \frac{2^{2p} \times (p!)^2}{(2p+1)!}.$$

Deuxième partie : l'équivalent de Stirling

Le but de cette partie est de prouver que $n!$ est équivalent à $n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout n dans \mathbb{N}^* , on pose $q_n = \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}$ et $u_n = \ln(q_n)$.

Question 8. Pour tout entier $n \geq 2$, prouver l'égalité $u_n - u_{n-1} = \left(n - \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1$.

Question 9. Prouver que $u_n - u_{n-1}$ est équivalent à $-\frac{1}{12n^2}$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 10. Justifier que la série de terme général $u_n - u_{n-1}$ converge. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Question 11. En déduire que la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ possède une limite finie ℓ strictement positive.

Question 12. En écrivant de deux manières la limite de $\sqrt{2p} W_{2p}$ quand p tend vers $+\infty$, obtenir l'égalité $\ell = \sqrt{2\pi}$.

Exercice 1. (*)

Question 13. Pour tout x réel, montrer que $\text{Arctan}(x)$ est un argument de $1 + ix$.

Question 14. Pour tout x réel, en déduire l'égalité $\text{Arctan}(x+1) - \text{Arctan}(x) = \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+x+x^2}\right)$.

Question 15. Montrer que la série numérique $\sum_{n \geq 0} \text{Arctan}\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$ est convergente et calculer sa somme..

Problème 2 (*)**Première partie (quelques calculs préliminaires)**

Soient A, B, C trois \mathbb{R} -espaces vectoriels. Soient $f \in \mathcal{L}(A, B)$ et $g \in \mathcal{L}(B, C)$. On note φ la restriction de g à $\text{Im}(f)$.

Question 16. Justifier les inclusions $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.

Question 17. Démontrer les égalités $\text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f)$ et $\text{Im}(\varphi) = \text{Im}(g \circ f)$.

Question 18. On suppose que A est de dimension finie. Montrer l'égalité $\dim(\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(g)) = \text{rg}(f) - \text{rg}(g \circ f)$.

Deuxième partie (rang des itérés d'un endomorphisme)

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. Soit u un endomorphisme de E . On rappelle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la notation u^k désigne l'itérée k -ième d'ordre k , c'est-à-dire la composée $u \circ \dots \circ u$, dans laquelle la lettre u apparaît k fois. En particulier, la notation u^0 désigne Id_E . On note n la dimension de E .

Question 19. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer les inclusions $\text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$ et $\text{Im}(u^{k+1}) \subset \text{Im}(u^k)$.

Question 20. Montrer que la suite de terme général $\delta_k = \text{rg}(u^k) - \text{rg}(u^{k+1})$ est décroissante.

Question 21. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq p$, on ait $\delta_k = 0$. Dans la suite, on choisit p minimal pour cette propriété.

Question 22. Montrer que $\text{Ker}(u^p)$ et $\text{Im}(u^p)$ sont supplémentaires dans E .

Question 23. On note v la restriction de u à $\text{Im}(u^p)$. Montrer que v est un automorphisme de $\text{Im}(u^p)$.

Troisième partie (endomorphismes nilpotents)

On reprend les notations de la deuxième partie, notamment l'endomorphisme u de E et l'entier p . On suppose de plus que u est *nilpotent*, ce qui signifie qu'il existe un entier s tel que u^s soit l'application nulle.

Question 24. Montrer que u^p est l'application nulle mais pas u^{p-1} .

Question 25. Montrer l'inégalité $p \leq n$.

Question 26. Dans cette question, on ajoute l'hypothèse $p = n$. On considère un vecteur x de E tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$ et on lui associe la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$.

Montrer que \mathcal{B} est une base de E et écrire la matrice de u relativement à cette base.

Exercice 2. ()** On se donne un entier $p \geq 2$ et un nombre complexe z . On pose $w = e^{i2\pi/p}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\delta_n = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} w^{kn}.$$

Question 27. Justifier que la série $\sum_{s \geq 0} \frac{z^{ps}}{(ps)!}$ converge absolument.

Question 28. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifier que δ_n vaut 0 ou 1, en précisant dans quel cas on obtient telle ou telle valeur.

Question 29. Justifier l'égalité $\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{z^{ps}}{(ps)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \delta_n$.

Question 30. En déduire une expression simplifiée de cette somme.

Question 31. Trouver une expression simplifiée de la somme

$$\sum_{s=0}^{+\infty} \frac{z^{ps+1}}{(ps+1)!}.$$

Problème 4 — inégalité de Jensen (*)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} non trivial. Soit f une fonction définie de I dans \mathbb{R} , supposée convexe.

Question 32. ()** Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, prouver l'énoncé (C_n) suivant : pour tout n -uplet (x_1, \dots, x_n) d'éléments de I , pour tout n -uplet (t_1, \dots, t_n) d'éléments de $[0, 1]$ dont la somme vaut 1, l'inégalité

$$f\left(\sum_{k=1}^n t_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^n t_k f(x_k)$$

est valable.

On raisonnera par récurrence.

Question 33. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini (Ω, \mathbb{P}) . On suppose que l'univers image $X(\Omega)$ est inclus dans I . Montrer alors l'inégalité

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

Question 34. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout n -uplet (x_1, \dots, x_n) de nombres strictement positifs, justifier l'inégalité arithmético-géométrique

$$(x_1 \cdots x_n)^{1/n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Problème 5 — théorème de Cesàro ()**

Question 35. (*)** On considère une suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose que cette suite converge et on note sa limite ℓ .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $m_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n z_k$. Montrer que la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ .

Cette propriété est le *théorème de Cesàro*.

Question 36. Soit $a > 0$. On considère une fonction $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ à valeurs positives. On suppose qu'il existe des constantes $\lambda \neq 0$ et $p > 1$ telles que

$$f(x) = x + \lambda x^p + o_{x \rightarrow 0}(x^p).$$

Trouver un exposant α tel que $(f(x))^\alpha - x^\alpha$ possède une limite finie et non nulle lorsque x tend vers 0.

Question 37. On définit une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en prenant $u_0 \in]0, \pi/2]$ et en posant $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

b. Trouver un exposant α tel que la suite de terme général $(u_{n+1})^\alpha - (u_n)^\alpha$ possède une limite finie et non nulle.

c. À l'aide du théorème de Cesàro, en déduire un équivalent de u_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 3. (*) Soit A une partie de \mathbb{R} non vide et majorée. Soit $\lambda \geq 0$.

On note λA l'ensemble $\{\lambda x ; x \in A\}$.

Montrer l'égalité $\sup(\lambda A) = \lambda \times \sup(A)$.

Exercice 4. (*) Soit M une matrice triangulaire supérieure de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que M^T commute avec M .

Montrer que M est diagonale.

Exercice 5. (*) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Justifier l'égalité $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(X \geq k)$.

Exercice 6. (*)** Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe une suite extraite de la suite complexe $(e^{i \ln(n)})_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers $e^{i\alpha}$.

Problème 6 — réarrangement de la somme d'une suite sommable (*)**

On considère une suite complexe $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et on suppose que la série $\sum z_n$ est absolument convergente. Le but de cet exercice est de prouver que pour toute bijection φ de \mathbb{N} sur \mathbb{N} , la série $\sum z_{\varphi(n)}$ converge absolument et qu'elle a la même somme que la série $\sum z_n$.

On considère donc une bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ et on pose $S = \sum_{n=0}^{+\infty} z_n$.

On fixe $\varepsilon > 0$.

Question 38. Prouver qu'il existe un entier n_0 vérifiant la propriété

$$\forall n \geq n_0, \quad \sum_{k=n}^{+\infty} |z_k| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Question 39. Prouver qu'il existe un entier n_1 tel que l'inclusion

$$[[0, n_0]] \subset \{\varphi(0), \dots, \varphi(n_1)\}$$

soit vraie.

Question 40. Pour tout entier $n \geq n_1$, prouver la majoration

$$\left| S - \sum_{k=0}^n z_{\varphi(k)} \right| \leq \varepsilon.$$

Question 41. Conclure.

Sudoku « PC* 2024-2025 »

Placer dans chaque case un chiffre entre 1 et 9 de sorte que chaque ligne, chaque colonne et chaque carré 3×3 délimité en gras contiennent exactement une fois chaque chiffre.

Thermo. Le long de chaque thermomètre, les chiffres augmentent strictement en partant du bulbe. L'étoile dans le coin supérieur droit est la superposition de huit thermomètres issus du centre de l'étoile.

Killer. Dans chaque cage délimitée en pointillés, les chiffres sont tous différents et leur somme est indiquée dans un coin de la cage.

Sandwich. Chaque nombre dans la marge est la somme des chiffres pris en sandwich entre le 1 et le 9 de la ligne/colonne correspondante.

Lien (cliquable) pour résoudre ce problème en ligne : <https://tinyurl.com/2j6h9ojq>

Pour me contacter : edouardlebeau-pc@yahoo.fr ou [edouardlebeau.nancy](#) sur Discord.

Site de la classe (lien cliquable) : https://cahier-de-prepa.fr/pc*-poincare

Serveur Discord de la classe (lien cliquable) : <https://discord.gg/fnJYTBVj2>