

Exercice 1. (*) Factoriser le polynôme $(X + i)^n - (X - i)^n$ puis exprimer la somme et le produit de ses racines.

Exercice 2. (*) Montrer que tout polynôme réel de degré impair possède au moins une racine réelle.

Exercice 3. (*) Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ une liste d'éléments de \mathbb{C} distincts. Soit $(m_1, \dots, m_p) \in (\mathbb{N}^*)^p$.

$$\text{On pose } P = \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k)^{m_k}.$$

Déterminer la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle P'/P .

Exercice 4. (*) Soient a_1, \dots, a_n des nombres complexes distincts. On pose

$$P = \prod_{k=1}^n (X - a_k).$$

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$. Qu'obtient-on en réduisant $\sum_{k=1}^n \frac{1}{z - a_k}$ au même dénominateur ?

Exercice 5. (*) On reprend le polynôme P de l'exercice précédent. Soit $r \in \llbracket 0, n - 2 \rrbracket$.

a. Réduire en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{X^{r+1}}{P}$.

b. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^n \frac{(a_k)^r}{P'(a_k)}$.

Exercice 6. (*) Soit un nombre complexe z tel que $|z| \neq 1$. À l'aide de sommes de Riemann, calculer l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{z - e^{it}}.$$

Exercice 7. (*) Soit un entier $n \geq 2$. On pose $\omega = e^{i2\pi/n}$.

a. Reconnaître le polynôme $\prod_{k=1}^{n-1} (X - \omega^k)$.

b. Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1 - \omega^k}$.

Exercice 8. (*) On note $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout quadruplet (i, j, k, ℓ) d'indices de $\llbracket 1, n \rrbracket$, montrer l'égalité $E_{i,j} \cdot E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$.

Exercice 9. (*) On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Trouver un polynôme annulateur de A non nul de degré aussi petit que possible.

b. En déduire une expression des puissances de A .

c. Vérifier que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 10. ()** On considère l'endomorphisme $f : P \mapsto P - P'$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

a. Trouver un polynôme annulateur de f .

b. En déduire que f est bijectif et déterminer son inverse.

Exercice 11. (*) Résoudre l'équation différentielle $xy'(x) + y(x) = \cos(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 12. (*) Résoudre l'équation différentielle $y' - y \tan(x) = \frac{1}{1 + \cos(x)}$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 13. ()** Résoudre sur \mathbb{R} le système différentiel suivant d'inconnue $(x, y) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$.

$$\begin{cases} (1+t^2)x'(t) = tx(t) + y(t) \\ (1+t^2)y'(t) = -x(t) + ty(t). \end{cases}$$

On utilisera pour cela la fonction $z = x + iy$.

Exercice 14. (*) Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver les solutions réelles de l'équation différentielle $y''(x) + y'(x) + y(x) = \cos(nx)$ sur \mathbb{R} .

Trouver une solution 2π -périodique? Est-ce la seule?

Exercice 15. (*) Résoudre l'équation différentielle $y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = x^2e^{-2x}$.

Exercice 16. (*)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n =]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$. On définit la fonction $f : x \mapsto \tan(x) - x$ sur la réunion des I_n .

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction tangente.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans I_n , notée x_n dans la suite.
3. Montrer que x_n est équivalent à $n\pi$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $y_n = x_n - n\pi$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $y_n = \text{Arctan}(x_n)$. En déduire la limite de y_n quand n tend vers $+\infty$.

5. Montrer que $\tan(y_n - \frac{\pi}{2})$ équivaut à $y_n - \frac{\pi}{2}$ quand n tend vers $+\infty$.

6. En déduire un développement asymptotique de la forme $y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + o(\frac{1}{n})$.

7. Obtenir un développement asymptotique de la forme $y_n = \frac{\pi}{2} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

Exercice 17. (*) On définit une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} par $f(0) = -1/2$ et

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

a. Vérifier que la fonction f est continue en 0.

b. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} .

Exercice 18. ()** Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En calculant de deux façons différentes le développement limité à l'ordre m en 0 de la fonction $x \mapsto (e^x - 1)^m$, montrer l'égalité

$$\sum_{k=0}^m (-1)^{m-k} \binom{m}{k} k^j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in [0, m-1], \\ m! & \text{si } j = m. \end{cases}$$

Exercice 19. (*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}$.

Vérifier que $u_n = \mathcal{O}_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^{3/2}} \right)$. Pourquoi est-ce intéressant?