

# Chapitre 1 — polynômes, calcul matriciel et révisions

## 1 Polynômes interpolateurs de Lagrange

Problème d'interpolation : étant donné  $a_1, \dots, a_n$  distincts dans  $\mathbb{K}$  et  $(b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$ , trouver les  $P \in \mathbb{K}[X]$  tels que

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(a_k) = b_k.$$

Unicité d'une solution dans  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ . Base de Lagrange de  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ .

Expression du reste de la division euclidienne d'un polynôme quelconque par  $(X - a_1) \cdots (X - a_n)$ .

Décomposition en éléments simples de fractions rationnelles à pôles simples.

Matrice de Vandermonde. Calcul du déterminant.

## 2 Calcul matriciel

Produit matriciel : expressions des coefficients ; colonnes ; lignes. Lien avec les opérations du pivot.

Application linéaire de  $U \mapsto A \times U$  canoniquement associée à  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , définie de  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  vers  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .

Noyau d'une matrice, image d'une matrice.

## 3 Trace

Trace d'une matrice carrée : c'est la somme de ses coefficients diagonaux. Identité  $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$ .

Identité  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .

Identité  $\text{tr}(P^{-1}AP) = \text{tr}(A)$ .

Trace d'un endomorphisme. Trace d'un projecteur.

## 4 Polynômes de matrices et polynômes d'endomorphismes

Rappel sur les matrices semblables. Formule  $(P^{-1}MP)^k = P^{-1}M^kP$ .

Polynômes de matrices. Relation  $P^{-1}Q(M)P = Q(P^{-1}MP)$ .

Polynômes d'endomorphismes. Formule  $Q(M_{\mathcal{B}}(u)) = M_{\mathcal{B}}(Q(u))$ .

Relation  $(QR)(u) = Q(u) \circ R(u)$ . Corollaire : les endomorphismes  $Q(u)$  et  $R(u)$  commutent.

Si  $u$  et  $v$  commutent, alors  $P(u)$  et  $Q(v)$  commutent.

## 5 Polynômes annulateurs

Polynômes annulateurs d'une matrice.

Existence d'un polynôme annulateur. Cas des matrices de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ .

Calcul des puissances d'une matrice via la division euclidienne. Calcul de l'inverse.

## 6 Équations différentielles

Ordre 1. Variation de la constante (ou méthode du facteur intégrant).

Ordre 2 à coefficients constants.

## 7 Développements limités

Formule de Taylor-Young avec les deux types de restes.

Unicité du développement limité.