

Problème 1 — Polynômes de Legendre ()**

On munit l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto (P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt.$$

Pour tout entier n , on pose $A_n = (X^2 - 1)^n$ et $P_n = \frac{1}{2^n \times n!} (A_n)^{(n)}$. Les polynômes P_n sont les *polynômes de Legendre*.

Question 1. Calculer P_0 , P_1 et P_2 .

Question 2. Pour tout n dans \mathbb{N} , montrer que P_n possède la même parité que n . Préciser son degré et son coefficient dominant.

Question 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On prend un polynôme Q dans $\mathbb{R}[X]$. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, montrer l'égalité

$$(A_n^{(n)}|Q) = (-1)^k (A_n^{(n-k)}|Q^{(k)}).$$

Question 4. En déduire que la famille $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.

Question 5. Exprimer $\|A_n^{(n)}\|^2$ en fonction d'une intégrale de Wallis puis en déduire la valeur de $\|P_n\|$.

Question 6. Soit $n \in \mathbb{N}$. En partant de l'égalité

$$((X^2 - 1) \times (X^2 - 1)^n)^{(n+2)} = \left(((X^2 - 1)^{n+1})' \right)^{(n+1)},$$

montrer l'égalité

$$(1 - X^2)P_n'' - 2XP_n' + n(n+1)P_n = 0.$$

Question 7. Soit n dans \mathbb{N}^* . Étudier les variations de la fonction

$$f_n : t \mapsto (P_n(t))^2 + \frac{1-t^2}{n(n+1)} (P_n'(t))^2.$$

En déduire que l'inégalité $|P_n(t)| \leq 1$ est valable pour tout t dans $[-1, 1]$.

Question 8. Soit n dans \mathbb{N}^* .

a. Montrer qu'il existe $(a_{n,0}, \dots, a_{n,n+1})$ dans \mathbb{R}^{n+2} vérifiant l'égalité

$$XP_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} P_k.$$

b. Montrer que le coefficient $a_{n,k}$ est nul pour tout $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$ ainsi que pour $k = n$.

c. Préciser les valeurs de $a_{n,n-1}$ et de $a_{n,n+1}$ puis en déduire une relation de récurrence entre les polynômes de Legendre.

d. Calculer ainsi les polynômes P_3 , P_4 et P_5 .

Question 9. (*)** Pour tout n dans \mathbb{N}^* , montrer que le polynôme P_n est scindé à racines simples et que ses racines sont toutes dans l'intervalle $] -1, 1[$.

a. Première méthode : utiliser le théorème de Rolle à répétition.

b. Deuxième méthode : noter a_1, \dots, a_s les racines de P_n de multiplicité impaire appartenant à $] -1, 1[$ et considérer le polynôme $Q = (X - a_1) \cdots (X - a_s)$.

Montrer que la fonction polynomiale $P_n Q$ est de signe constant sur $[-1, 1]$ et en déduire à l'aide de la question 3 que $s \geq n$.

Problème 2 — Un calcul de $\zeta(2)$ (*)
--

Le but de cet exercice est de montrer la formule remarquable suivante

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Cette valeur étonnante a été découverte par L. Euler en 1735, mais la démonstration qui suit — considérée communément comme la plus élémentaire de toutes — date de 1973.

On fixe un entier strictement positif n et on introduit le polynôme

$$P_n = \sum_{p=0}^n \binom{2n+1}{2p+1} (-1)^p X^{n-p}.$$

On introduit la fonction *cotangente*, définie sur $]0, \pi[$ par la formule

$$\cotan(t) = \frac{\cos(t)}{\sin(t)}.$$

1. Montrer l'égalité

$$(X + i)^{2n+1} - (X - i)^{2n+1} = 2iP_n(X^2).$$

2. Pour tout t dans l'intervalle $]0, \pi/2]$, montrer l'égalité

$$P_n(\cotan^2(t)) = \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin^{2n+1}(t)}.$$

3. En déduire que les racines du polynôme P_n sont les nombres $\cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$, où l'indice k parcourt $\llbracket 1, n \rrbracket$.

4. En déduire l'égalité

$$\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

5. On définit sur $]0, \pi/2]$ la fonction $\varphi : t \mapsto t \cotan(t)$.

a. Pour tout t dans $[0, \pi/2]$, prouver la majoration $\sin(t) \leq t$.

b. Pour tout t dans $]0, \pi/2]$, prouver l'égalité

$$\varphi'(t) = \frac{\cos(t) \sin(t) - t}{\sin^2(t)}.$$

c. En déduire les variations de φ sur $]0, \pi/2]$ (on donnera notamment la limite en 0).

6. Pour tout t dans l'intervalle $]0, \pi/2]$, montrer l'encadrement

$$\frac{1}{t^2} - 1 \leq \cotan^2(t) \leq \frac{1}{t^2}.$$

7. En déduire la valeur de la somme attendue.

Exercice 1. ()** Soient P et Q deux polynômes non nuls.

Montrer que l'ensemble des solutions de l'équation $P(x) = Q(x)e^x$ est fini.

Exercice 2. ()** Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\text{Arctan}(x-1) + \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(x+1) = \pi/2$.

Exercice 3. (*)** Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^2(n)}{n}$ est divergente.