PC* — mathématiques **jeudi 12 septembre 2024**
Devoir surveillé n^o 1 **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours et de calcul

Question 1. Énoncer le théorème de Rolle.

Question 2. Énoncer le théorème du rang en version géométrique.

Question 3. Donner la définition de la trace d'une matrice carrée et de la trace d'un endomorphisme.

Question 4. Rappeler la définition d'une famille libre.

Question 5. Donner sans démonstration, sous forme factorisée, le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{pmatrix}$.

Question 6. Pour tout $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geqslant p$, démontrer l'égalité $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

Question 7. Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$xy'(x) + 2y(x) = \frac{\cos(x)}{x},$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(]0, +\infty[, \mathbb{R})$.

Exercice 1. (Polynômes de Chebyshev de deuxième espèce)

On définit une suite $(\mathrm{U}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes réels en posant

$$\begin{cases} \mathrm{U}_0 = 0, \quad \mathrm{U}_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{U}_{n+2} = 2\mathrm{X}\mathrm{U}_{n+1} - \mathrm{U}_n. \end{cases}$$

Question 8. Calculer $\mathrm{U}_2, \mathrm{U}_3, \mathrm{U}_4, \mathrm{U}_5$.

Question 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que U_n est de degré $n-1$ et préciser son coefficient dominant.

Question 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer l'égalité $\mathrm{U}_n(-\mathrm{X}) = (-1)^{n-1}\mathrm{U}_n(\mathrm{X})$. Comment reformuler ceci ?

Question 11. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout t réel, montrer l'égalité $\mathrm{U}_n(\cos(t))\sin(t) = \sin(nt)$.

Question 12. Pour tout entier $n \geqslant 2$, justifier que les racines du polynôme U_n sont exactement les nombres de la forme $\cos(k\pi/n)$, où k décrit $[\![1, n-1]\!]$.

Question 13. En déduire une simplification du produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \cos(k\pi/n)$.

Exercice 2. On fixe un entier $n \geqslant 2$. Pour tout $t \in [0, +\infty[$, on pose

$$f_n(t) = \frac{1}{(1+t)(2+t)\cdots(n+t)}.$$

On note I_n la primitive de f_n sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en 0.

Question 14. Pour tout $t \in [0, +\infty[$, démontrer la relation

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{(n-1)!} \binom{n-1}{k-1} \frac{1}{k+t}.$$

Question 15. En déduire une expression de la fonction I_n sur $[0, +\infty[$.

Question 16. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1}$.

Question 17. Montrer que la fonction I_n possède une limite finie en $+\infty$ et exprimer cette limite (sous la forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à simplifier).

Exercice 3. On va montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la suite de terme général $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ converge vers e^z.

On fixe donc un nombre complexe z, que l'on écrit sous la forme $z = x + \mathrm{i}y$, où x et y sont réels.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les polynômes réels

$$\mathrm{P}_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{X}^k}{k!}, \quad \mathrm{Q}_n = \left(1 + \frac{\mathrm{X}}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_n = \mathrm{P}_n - \mathrm{Q}_n.$$

Première méthode

Question 18. Démontrer la propriété attendue dans le cas où z est réel et positif.

Question 19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que le polynôme R_n est à coefficients positifs.

Question 20. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire la majoration $|\mathrm{R}_n(z)| \leqslant \mathrm{R}_n(|z|)$.

Question 21. Conclure.

Deuxième méthode

Question 22. Montrer qu'il existe un entier n_z strictement positif tel que pour tout entier $n \geqslant n_z$, le nombre $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ admette $n \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y}{x+n}\right)$ pour argument.

Question 23. Pour tout entier $n \geqslant n_z$, écrire alors $\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n$ sous forme trigonométrique puis conclure.

Puissances d'une matrice

On considère la matrice $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la matrice

$$\mathrm{M}_n(z) = \begin{pmatrix} 1 & -z/n \\ z/n & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice identité I_2 sera notée I pour alléger les notations.

Question 24. Déterminer un polynôme annulateur de la matrice J de degré 2, noté P.

Question 25. Pour tout polynôme $\mathrm{S} \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$, déterminer le reste de la division euclidienne de S par P.

Question 26. En déduire un calcul de $\mathrm{M}_n(z)^n$. On exprimera le résultat sous la forme d'une combinaison linéaire des matrices J et I.

Question 27. Déterminer la limite des coefficients de $\mathrm{M}_n(z)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
