Chapitre 3 — séries numériques

1 Séries numériques

1.1 Vocabulaire et notations

Série numérique $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$. Somme partielle $\mathrm{S_N} = \sum\limits_{n=n_0}^{\mathrm{N}} u_n$.
Série convergente. Somme $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$. Reste $\mathrm{R_N} = \sum\limits_{n=\mathrm{N}+1}^{+\infty} u_n$.

1.2 Séries de référence

Série géométrique. Série de Riemann. Série exponentielle. Les autres seront vues plus tard.

1.3 Propriétés algébriques

Stabilité par combinaison linéaire. Attention, ce n'est pas stable par produit.
Cas des séries complexes.
Le produit de Cauchy sera mentionné dans le chapitre sur les séries entières.

1.4 Conditions nécessaires de convergence

La convergence implique que $\mathrm{S_N} - \mathrm{S_{N-1}}$ tend vers 0. Notion de divergence grossière.
Variante : si $\mathrm{S_{2N}} - \mathrm{S_N}$ ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ est divergente.

1.5 Série télescopique associée à une suite

Le télescopage $\sum\limits_{n=n_0}^{\mathrm{N}-1} (u_{n+1} - u_n) = u_\mathrm{N} - u_{n_0}$ prouve que la convergence de la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ équivaut à la convergence de la série télescopique associée $\sum(u_{n+1} - u_n)$.
Constante d'Euler. Équivalent de Stirling.

2 Séries à termes positifs

2.1 Somme d'une série à termes positifs

Leur intérêt est que la suite des sommes partielles est croissante, donc elle possède une limite. Il suffit (et il faut) que cette suite soit majorée pour que la série converge.

Notations $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n = +\infty$ et $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n < +\infty$.

2.2 Critères de comparaison

Critère de domination. Critère de négligeabilité. Critère des équivalents.
Attention, ces critères ne marchent pas forcément dans le cas des séries dont le terme général change de signe.
Exemples : les séries de la forme $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ dans le cas $\alpha \neq 1$.

2.3 Règle de d'Alembert

On suppose que les u_n sont tous strictement positifs et que le quotient u_{n+1}/u_n possède une limite ℓ (éventuellement infinie).
Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.
Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
Si $\ell = 1$, alors la règle de d'Alembert ne permet pas de conclure.

3 Convergence absolue

3.1 Définition

La *convergence absolue* d'une série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$ signifie que la série $\sum\limits_{n\geqslant n_0} |u_n|$ converge.

On dit aussi dans ce cas que la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est *sommable*.

3.2 Propriété fondamentale

La convergence absolue implique la convergence. Attention, la réciproque est fausse.

3.3 Adaptation des critères de comparaison

Critère de domination. Critère de négligeabilité. Règle de d'Alembert.

3.4 Indices pairs et impairs

La convergence de $\sum u_{2p}$ et de $\sum u_{2p+1}$ implique celle de $\sum u_n$. La réciproque est fausse, mais devient vraie en cas de convergence absolue.

4 Séries alternées

4.1 Théorème des séries alternées (Leibniz)

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite réelle décroissante, de limite nulle. La série $\sum(-1)^n u_n$ est alors convergente.

De plus, pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant n_0$, le reste $\sum\limits_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est du signe de $(-1)^{\mathrm{N}} u_{\mathrm{N}}$ et sa valeur absolue est dominée ainsi

$$\left| \sum_{n=\mathrm{N}}^{+\infty} (-1)^n u_n \right| \leqslant u_{\mathrm{N}}.$$

Calcul de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$.

4.2 Réécriture de la somme et des restes

On sépare les indices pairs et impairs dans les sommes partielles puis on passe à la limite.

4.3 Contre-exemples aux critères de comparaison

Où l'on mesure l'importance de l'hypothèse de positivité.

Programme de colles n° 2 (du lundi 30 septembre au vendredi 11 octobre 2024)

Tout sur le chapitre 3 (séries numériques). Le produit de Cauchy n'a pas encore été vu.
