

**Séries à termes positifs**

**Exercice 1. (\*) (Séries de Bertrand)**

a. Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et tout  $\beta > 1$ , montrer que la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{(\ln(n))^\alpha}{n^\beta}$  est convergente. Pour cela, on comparera le terme général à celui d'une série de Riemann bien choisie.

b. Pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  et tout  $\beta \in ]0, 1[$ , montrer que la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\beta (\ln(n))^\alpha}$  est divergente. La suggestion précédente est reconduite.

c. Soit  $\alpha > 0$ . Étudier la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$ . On s'inspirera de la méthode d'étude des séries de Riemann.

**Exercice 2. (\*)** Déterminer la nature des séries dont le terme général suit

$$a_n = 2^{-(\ln(n))^{1/3}}, \quad b_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n}, \quad c_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right), \quad d_n = \frac{n! x^n}{n^n}, \quad e_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n \ln(n)}.$$

Pour la première, on comparera le terme général à celui d'une série de Riemann. Pour les deux suivantes, on commencera par trouver un équivalent du terme général.

**Exercice 3.** Étudier la nature des séries dont les termes généraux suivent. Pour  $d_n$  et  $i_n$ , calculer la somme.

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{3^n}{n} & b_n &= \frac{n}{3 + \cos(n)} & c_n &= \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} & d_n &= (\cos(n) + \sin(n))e^{-n} & e_n &= \frac{\sin(n)}{n^{3/2}} \\ f_n &= e^{1/n} - \cos(1/n) - \sin(1/n) & g_n &= 3^{1/n} - 2^{1/n} & h_n &= \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n & i_n &= \frac{n}{(n+1)!} \\ j_n &= \frac{1}{\ln(n)\sqrt{n}} & k_n &= \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt & \ell_n &= \int_0^1 e^{-t} t^n dt \\ m_n &= \int_0^1 e^{-t} t^n (1-t) dt & p_n &= \frac{1}{3^n n!} \prod_{k=1}^n (3k-2) & q_n &= n x^{n-1} & r_n &= \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \end{aligned}$$

**Série télescopique**

**Exercice 4. (\*\*)** Soit  $s \in \mathbb{R}$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle strictement positive. On fait l'hypothèse

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{s}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Montrer que la suite de terme général  $\ln(n^s u_n)$  possède une limite finie. En déduire la nature de la série  $\sum u_n$ .

Exemple : nature de  $\sum_{n \geq 1} p_n$  dans l'exercice 3.

**Séries de référence**

**Exercice 5. (\*)** Pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , déterminer si les sommes suivantes existent et calculer leurs valeurs éventuelles.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^{2n-1}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 \frac{z^n}{n!}.$$

**Exercice 6. (\*)** Pour tout  $\alpha > 1$ , exprimer  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  et  $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^\alpha}$  en fonction de  $\zeta(\alpha)$ .

## Convergence absolue

**Exercice 7. (\*\*)** On fixe  $(a, b)$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}^*$ , on pose

$$u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2).$$

a. Obtenir un développement asymptotique de  $u_n$  avec la précision  $\mathcal{O}(1/n^2)$ .

b. En déduire qu'il existe un unique choix de  $(a, b)$  pour lequel la série de terme général  $u_n$  est convergente et préciser ce choix.

c. Pour ce choix particulier de  $(a, b)$ , calculer la somme  $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ .

**Exercice 8. (\*\*)** Montrer que pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , le nombre

$$u_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$$

est un entier.

En déduire que la série de terme général  $\sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$  converge absolument.

## Séries alternées

**Exercice 9. (\*\*)** Montrer que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$  est convergente. Est-elle absolument convergente ?

**Exercice 10. (\*)** Soit  $\alpha > 0$ . Étudier la nature de la série de terme général  $\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ .

**Exercice 11. (\*\*)** Étudier la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$ .

**Exercice 12. (\*\*)** On considère une fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$ , à valeurs réelles, décroissante, convexe, de limite nulle en  $+\infty$ . Le théorème des séries alternées permet alors de définir une suite réelle  $(r_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n(f) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k f(k).$$

a. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , prouver l'égalité  $|r_n(f)| = \sum_{p=0}^{+\infty} (f(n+2p+1) - f(n+2p+2))$ .

b. En déduire que la suite de terme général  $|r_n(f)|$  est décroissante.

c. Montrer que la série  $\sum_{n \geq 0} r_n(f)$  converge.

d. Pour tout  $\alpha > 0$ , vérifier que la fonction  $f_\alpha : t \mapsto t^{-\alpha}$  est convexe.

Le reste  $r_n(f_\alpha)$  est noté  $R_n(\alpha)$  dans la suite.

e. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , simplifier  $|R_n(\alpha)| + |R_{n-1}(\alpha)|$ .

f. En déduire un équivalent simple de  $|R_n(\alpha)|$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

**Exercice 13. (\*\*)** Étudier la nature de la série de terme général  $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + 2n})$ .

**Exercice 14. (\*\*\*)** Montrer que  $\cos(1)$  est irrationnel.

## Exercices variés

**Exercice 15. (\*\*)** Soit  $\alpha > 0$ . Déterminer la nature de la série de terme général  $u_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor - \lfloor \sqrt{n-1} \rfloor}{n^\alpha}$ .

**Exercice 16. (\*\*\*)** On fixe un entier  $n$  supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que la série de terme général  $\frac{k - n \lfloor \frac{k}{n} \rfloor}{k(k+1)}$  est convergente.

b. Montrer que sa somme vaut  $\ln(n)$ .

**Exercice 17. Transformation d'Abel (\*\*)** On considère une suite complexe  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante, de limite nulle.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $S_n = \sum_{k=0}^n z_k$ . On suppose que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée.

a. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , justifier l'égalité  $\sum_{k=1}^n u_k z_k = \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k+1}) S_k - u_1 S_0 + u_{n+1} S_n$ .

b. En déduire que la série  $\sum_{k \geq 1} u_k z_k$  est convergente.

c. Pour tout  $\theta \in ]0, 2\pi[$  et tout  $\alpha > 0$ , montrer que la série  $\sum_{k \geq 1} \frac{e^{ik\theta}}{k^\alpha}$  converge.

**Exercice 18. (\*\*)** On considère une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à termes strictement positifs. On pose  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

a. Prouver que la série  $\sum \frac{u_n}{(S_n)^2}$  converge. Pour cela, on observera la minoration  $(S_n)^2 \geq S_n S_{n-1}$ .

b. Prouver que la série  $\sum \frac{u_n}{S_n}$  a la même nature que la série  $\sum u_n$ .

Pour le cas de divergence, on séparera le cas où  $u_n/S_n$  tend vers 0 et on exploitera l'équivalent  $-\ln(1-t) \sim t$  lorsque  $t$  tend vers 0.

**Exercice 19. (\*\*\*)** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle.

On suppose que pour toute suite réelle  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que la série  $\sum (b_n)^2$  converge, la série  $\sum a_n b_n$  converge.

Montrer que la série  $\sum (a_n)^2$  converge. (Raisonnement par l'absurde au moyen de l'exercice précédent.)

**Exercice 20. (\*\*)** Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite réelle vérifiant la relation de récurrence  $x_{n+1} = nx_n - n^2$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $y_n = \frac{x_n}{(n-1)!}$ .

a. Montrer que la suite  $(y_n)_{n \geq 1}$  converge et exprimer sa limite en fonction de  $x_1$ . Cette limite est notée  $\ell$ .

b. Trouver un équivalent simple de  $\ell - y_n$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$

c. Obtenir une condition nécessaire et suffisante sur  $x_1$  pour que  $x_n = \mathcal{O}(n)$ .

**Exercice 21. (\*\*\*)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle à termes strictement positifs telle que la série  $\sum u_n$  soit convergente.

Montrer que la série de terme général  $w_n = (u_n)^{\frac{n}{n+1}}$  est convergente aussi.

**Indication.** On majorera  $w_n$  en distinguant deux cas, selon que  $u_n$  est majoré ou minoré par  $2^{-n-1}$ .