

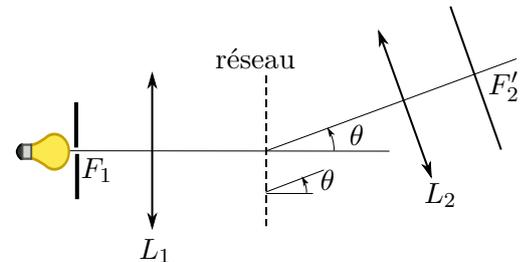
# DEVOIR N° 3

Le jeudi 19 septembre

Pour une version plus difficile de l'énoncé (piste rouge), ne traitez pas la partie II.C1 du second problème (Q24 à Q32). Pour une version plus facile de l'énoncé (piste bleue), ne traitez pas la partie « Problème des raies fantômes » du premier problème. Vous devez faire un choix exclusif entre ces deux options.

## Quelques limitations des réseaux

On utilise un réseau pour produire le spectre d'une source lumineuse et mesurer les longueurs d'onde observées. Pour cela, la source est placée derrière une étroite fente au foyer objet  $F_1$  d'un collimateur représenté par la lentille  $L_1$ . Le plan du réseau est orthogonal à l'axe optique de  $L_1$  et ses traits sont perpendiculaires au plan de la figure. Chacune de ces  $N$  « fentes », éloignée d'une distance  $d$  de ses premières voisines, diffracte la lumière. Une direction quelconque de diffraction vers l'infini est repérée par l'angle  $\theta$  qu'elle forme avec l'axe optique de  $L_1$ . L'observation se fait dans le plan focal d'une lentille de projection  $L_2$ . L'axe optique de  $L_2$  peut être orienté de manière à recueillir à son foyer des faisceaux définis par un angle  $\theta$  élevé ; cet angle ne sera donc pas supposé petit dans les calculs.



### Pouvoir de résolution intrinsèque

1. Tracer sur un schéma 3 rayons de la source et jusqu'à l'écran, diffractés dans la même direction  $\theta$ .
2. Exprimer en fonction de  $d$  et  $\theta$  la différence de marche  $\delta$  entre deux rayons diffractés par deux traits successifs du réseau et parvenant au même point de l'écran.
3. Pour une longueur d'onde  $\lambda$  donnée, caractériser en le justifiant les directions  $\theta$  pour lesquelles la lumière est particulièrement intense.
4. Pour simplifier, on suppose  $N$  pair. On considère une direction  $\theta$  telle que la différence de marche exprimée à la question 3 pour deux traits successifs, vérifie  $\delta = p\lambda + \lambda/N$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ . Que vaut dans ce cas la différence de marche  $\delta'$  entre les ondes émises par deux traits distants de  $Nd/2$  (c'est à dire entre un trait d'indice  $i$  et un autre d'indice  $i + N/2$ ) ? Que vaut l'ordre associé  $p'$  ? En déduire que, dans cette direction, l'intensité lumineuse diffractée par l'ensemble du réseau est nulle.
5. De combien varie  $\sin \theta$  lorsqu'on passe de l'une des directions définies dans la question 3 à la direction la plus proche de la question 4 ? On notera  $\Delta(\sin \theta)$  la variation cherchée.
6. On considère ici que la source émet un doublet, c'est à dire deux longueurs d'onde très proches  $\lambda_1$  et  $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$ . Définir précisément le pouvoir de résolution théorique du spectroscopie à réseau. En utilisant le critère de Rayleigh et les questions précédentes, le déterminer dans un ordre  $p$  donné.
7. Application numérique : pour  $N = 2000$ , peut-on résoudre dans l'ordre un le doublet jaune ( $\lambda = 600 \text{ nm}$ ) d'une lampe au sodium ( $\Delta\lambda = 0,6 \text{ nm}$ ) et celui d'une lampe au mercure ( $\Delta\lambda = 2,0 \text{ nm}$ ) ?

### Effet de la largeur de la fente source

En pratique, la fente source placée en  $F_1$  n'est pas infiniment fine, elle s'étend entre deux points  $A$  et  $B$  symétriques par rapport à l'axe optique (figure 1). On note  $2a$  sa largeur dans la direction orthogonale à l'axe optique. À cause de cette largeur, la raie observée dans le plan focal de  $L_2$  pour une longueur d'onde donnée et un ordre donné s'étend sur une certaine largeur. Si deux longueurs d'onde sont trop proches, les raies se chevauchent et on ne peut plus les résoudre.

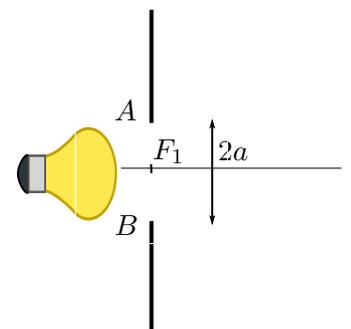


FIGURE 1 – Fente élargie

8. Représenter sur une figure le cheminement vers  $L_1$  puis jusqu'au réseau de plusieurs rayons issus de  $A$  d'une part, et de plusieurs rayons issus de  $B$  d'autre part. Exprimer en fonction de  $a$  et  $f_1$  les valeurs extrêmes  $i_1 > 0$  et  $-i_1$  de l'angle d'incidence  $i$  sur le réseau. L'angle  $i_1$  est supposé petit.

9. Que deviennent pour des rayons inclinés d'un angle  $i$  les résultats des questions 3 et 4 ?

10. En raison de l'étendue de la fente source, l'angle  $i$  prend toutes les valeurs autour de zéro entre les bornes  $-i_1$  et  $i_1$  déterminées dans la question 8. Pour un ordre  $p$  donné et  $\lambda$  donné, déterminer le demi-intervalle de variation de  $\sin \theta$ , noté  $\Delta'(\sin \theta)$ , sur lequel s'étale la lumière autour de la direction définie dans la question 3.

11. On suppose  $N$  infini. À quelle condition évite-t-on le chevauchement des raies associées à deux longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ? AN : Peut-on résoudre dans l'ordre 1 le doublet jaune du sodium et celui du mercure ? On donne  $f'_1 = 10 \text{ cm}$ ,  $2a = 0,1 \text{ mm}$  et  $1/d = 600 \text{ mm}^{-1}$ .

### Problème des raies fantômes (piste rouge seulement)

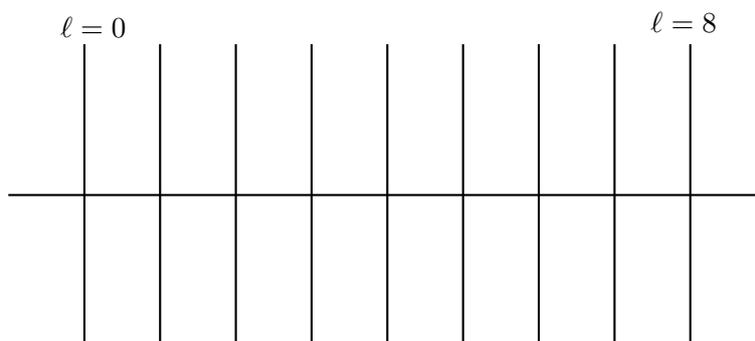
Certains réseaux plans présentent à l'issue de leur fabrication des défauts affectant la position des traits, qui ne sont alors pas régulièrement espacés comme ils devraient l'être dans un réseau parfait. On s'intéresse ici à un défaut de positionnement se répétant périodiquement. En observant le spectre produit par le réseau, on relève la présence, de part et d'autre de chaque raie attendue, de deux raies parasites peu intenses souvent appelées « raies fantômes ». Ces raies fantômes constituent un obstacle à une bonne observation du spectre, puisqu'on risque de les attribuer par erreur à des longueurs d'onde inexistantes.

Dans cet exercice, on interprète les raies fantômes et on établit des résultats théoriques concernant leur intensité et leur position. On se place en incidence normale ( $i = 0$ ).

12. Le réseau parfait possédant un pas  $d$ , ses traits se situent aux abscisses  $0, d, 2d$ , etc,  $x_\ell = \ell d$  avec  $\ell \in \{0, 1, 2, \dots, (N - 1)\}$ . Dans le réseau réel affecté du défaut périodique, les traits ont pour abscisses

$$x'_\ell = x_\ell + \epsilon d \sin \left( \frac{2\pi\ell}{Q} \right) \quad , \quad \epsilon < 1 \quad \text{et} \quad Q \in \mathbb{N}^* \quad .$$

Que représente  $Q$  ? Pour  $Q = 8$ , faire un dessin représentant les 9 premiers traits idéaux en noir, comme ci-dessous, et les 9 traits réels associés en rouge. On prendra pour ce dessin  $\epsilon = 0,4$ .



13. Le réseau est éclairé en incidence normale. Que vaut le déphasage  $\varphi'_\ell$  entre l'onde diffractée à l'infini par le trait d'indice  $\ell$ , et celle diffractée par le trait d'indice 0 ?

14. On note  $s_0(\theta, t) = Ae^{j(\psi_0(M) - \omega t)}$  l'onde émise par le trait d'indice  $\ell = 0$  au point  $M$  repéré par la direction  $\theta$ . En introduisant les  $\varphi'_\ell$ , exprimer sous forme de somme le scalaire optique dans la direction  $\theta$ , sans chercher à simplifier.

15. La suite des calculs suppose que la modification des déphasages due au défaut, par rapport à la situation idéale dans défaut, est « très faible » pour tout  $\ell$ . À quelle condition, portant sur  $\epsilon$ , cela est-t-il le cas ? On répondra par une inégalité forte sur  $\epsilon$ .

16. Sous l'hypothèse de la question précédente, un calcul non demandé donne

$$\exp(j\varphi'_\ell) \simeq \exp \left( \frac{2j\ell\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) + \frac{\epsilon d \pi \sin \theta}{\lambda} \exp \left( 2j\ell\pi \left( \frac{d \sin \theta}{\lambda} + \frac{1}{Q} \right) \right) + \frac{\epsilon d \pi \sin \theta}{\lambda} \exp \left( 2j\ell\pi \left( \frac{d \sin \theta}{\lambda} - \frac{1}{Q} \right) \right)$$

À partir de cette expression, justifier que le maximum de lumière d'ordre  $p$  (défini à la question 4) est entouré de deux autres maximums (ce sont les raies fantômes). Donner les deux valeurs de  $\sin \theta$  définissant la direction de ces nouveaux maximums.

17. Quel est le rapport d'intensité  $I_{\text{fant}}/I_{\text{vraie}}$  des raies fantômes par rapport aux raies véritables ? Dans cette expression, on remplacera  $\sin \theta$  par sa valeur dans l'ordre  $p$  en l'absence de défaut (ce qui est une approximation).

18. Un expérimentateur ignorant du défaut considère par erreur que la raie fantôme est une raie réelle à la longueur d'onde  $\lambda' = \lambda \pm \Delta\lambda$ , alors qu'il s'agit en réalité d'une raie fantôme à la longueur d'onde  $\lambda$ . Quelle est l'expression de  $\Delta\lambda$  ?

19. A.N. : pour  $P = 400$ ,  $\epsilon = 0,01$  et  $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ , calculer  $\Delta\lambda$  et  $I_{\text{fant}}/I_{\text{vraie}}$  dans l'ordre 1. Le problème de raies fantômes vous paraît-il plus gênant ou moins gênant que celui lié au pouvoir de résolution intrinsèque (questions 6 et 7) ?

## Observation de Proxima du Centaure

Centrale-Supélec

L'étoile *Proxima Centauri* a été découverte en 1915 par l'astronome britannique Robert Innes, alors directeur de l'observatoire de l'Union à Johannesburg en Afrique du Sud. C'est une étoile de type naine rouge, de masse  $M_E = 2,44 \times 10^{29} \text{ kg}$  et de rayon  $R_E = 9,81 \times 10^4 \text{ km}$ . Elle est située à  $D_E = 3,99 \times 10^{13} \text{ km}$  soit 4,22 années-lumière du Soleil.

Dans la suite du sujet, toutes les applications numériques seront faites à la longueur d'onde moyenne du visible  $\lambda_{\text{obs}} = 600 \text{ nm}$ .

Pour voir l'étoile *Proxima Centauri*, un instrument d'optique est utilisé. Il est modélisé dans la suite par deux lentilles :

- une lentille convergente  $L_1$  objectif, de centre optique  $O_1$ , de foyer principal objet  $F_1$ , de foyer principal image  $F'_1$  et de distance focale image  $f'_1 = 8 \text{ m}$  ;
- une lentille divergente  $L_2$  de projection, de centre optique  $O_2$ , de foyer principal objet  $F_2$ , de foyer principal image  $F'_2$  et de distance focale image  $f'_2 = -0,02 \text{ m}$ .

L'instrument d'optique est pointé vers l'étoile *Proxima Centauri*.

**Q 14.** Où est située l'image de l'étoile par la lentille  $L_1$ , appelée image intermédiaire  $A_1B_1$  ? Illustrer cette situation par un schéma.

**Q 15.** Déterminer l'expression de la taille de cette image intermédiaire  $A_1B_1$  (non algébrique) en fonction du rayon  $R_E$  de l'étoile et des caractéristiques de la lentille objectif  $L_1$ .

**Q 16.** La lentille de projection  $L_2$ , divergente, sert à faire de l'image intermédiaire  $A_1B_1$  une image définitive  $A'B'$ , réelle, non inversée et agrandie d'un facteur 4. Calculer la distance  $O_1O_2$  pour respecter ces contraintes.

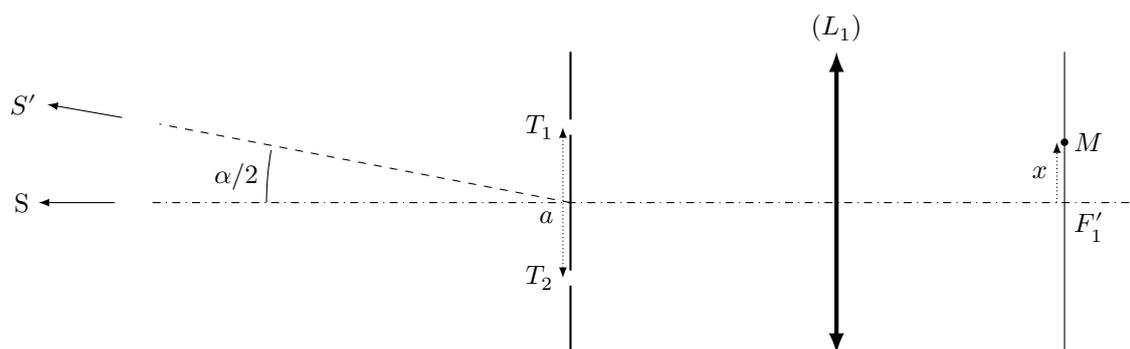
**Q 17.** Illustrer par un schéma la position de  $A_1B_1$ , de  $A'B'$  et de  $L_2$  (sans représenter  $L_1$ ).

**Q 18.** En 1915, l'image définitive  $A'B'$  de l'étoile se formait sur une plaque photographique de dimension  $24 \text{ mm} \times 36 \text{ mm}$ , composée de cristaux de  $10 \mu\text{m}$  de chlorure d'argent, précipité blanc qui noircit à la lumière. L'image définitive de l'étoile *Proxima Centauri* est-elle vue comme ponctuelle ou étendue sur la plaque photo ?

### Mesure du rayon de l'étoile (piste bleue seulement)

En 2002, le VLT (Very Large Telescope) utilisa l'interférométrie pour mesurer le diamètre angulaire de *Proxima Centauri* :  $\alpha \simeq 1,02 \pm 0,08$  milliseconde d'arc. Connaissant sa distance, obtenue par la méthode de la parallaxe, il est alors possible de déterminer son rayon.

**II.C.1)** L'étoile est d'abord supposée ponctuelle et l'instrument d'optique est pointée sur elle. L'étoile se situe à l'infini sur l'axe optique de l'instrument, elle est repérée par son centre  $S$ . Le dispositif d'interférométrie est modélisé par deux trous d'Young de taille identique, respectivement en  $T_1$  et  $T_2$ , séparés d'une distance  $a$  réglable. Ce dispositif est placé devant la lentille convergente  $L_1$  de l'instrument d'optique. Pour simplifier, on ne tiendra pas compte dans cette partie de la seconde lentille  $L_2$  et les observations sont donc effectuées dans le plan de l'image intermédiaire. Un point  $M$  dans ce plan est repéré par son abscisse  $x$  (figure 5).



**Figure 5** Schéma du dispositif d'interférométrie pour la mesure du rayon de l'étoile *Proxima Centauri*

- Q 24.** Faire un schéma des deux rayons lumineux passant par  $T_1$  et  $T_2$  qui convergent vers le point  $M$ . Représenter la différence de marche entre ces deux rayons sur ce schéma.
- Q 25.** Établir l'expression de l'ordre d'interférence  $p_S(M)$ , produit par la source  $S$  au point  $M$ .
- Q 26.** Décrire alors la figure d'interférences.
- Q 27.** En notant  $I_0$  l'intensité moyenne, donner, sans démonstration, l'expression de l'intensité lumineuse  $I(M)$  dans le plan d'observation.
- II.C.2)** L'étoile est à présent modélisée comme une source étendue vue sous un diamètre angulaire  $\alpha$ . On considère un autre point source  $S'$  à la périphérie de l'étoile (figure 5).
- Q 28.** Faire un schéma des deux rayons lumineux issus de  $S'$ , passant par  $T_1$  et  $T_2$  et qui convergent vers le point  $M$ . Représenter la différence de marche entre ces deux rayons sur ce schéma.
- Q 29.** Établir l'expression de l'ordre d'interférence  $p_{S'}(M)$  produit par la source  $S'$  au point  $M$ .
- Q 30.** En déduire l'expression de la plus petite valeur de  $a$  qui conduit au brouillage de la figure d'interférence produite par les deux sources incohérentes  $S$  et  $S'$ .
- Q 31.** Faire l'application numérique et commenter.
- Q 32.** Expliquer qualitativement pourquoi le raisonnement précédent, utilisant deux sources ponctuelles l'une située au centre et l'autre sur le bord apparent de l'étoile, rend compte des observations obtenues avec l'objet étendu qu'est la véritable étoile.

## Arc-en-ciel

Adapté de CCINP et École Polytechnique

*Cet énoncé a été composé en combinant deux sujets de concours de difficultés très différentes. Ne soyez donc pas surpris que les questions soient hétérogènes, comportent quelques répétitions ou notations mal harmonisées.*

Un arc-en-ciel est constitué d'une série d'arcs lumineux, dont le centre est situé sur le prolongement de la ligne qui va du soleil à l'œil de l'observateur, l'un et l'autre étant donc considérés ici comme ponctuels. Ce phénomène est principalement dû à la réfraction de la lumière solaire dans les gouttes d'eau, dont le rayon dans l'atmosphère va de 0,1 mm à 2,5 mm, avec une moyenne de 0,5 mm. Le rayon des gouttelettes dans un nuage ou dans la brume est d'environ 0,01 mm. Toutes ces gouttes peuvent produire des arcs-en-ciel, mais seules les plus grosses d'entre elles donneront un phénomène aux couleurs vives. En-dessous d'une taille de 0,2 mm, la partie rouge de l'arc disparaît. Les gouttes très petites produisent des phénomènes de diffraction importants dont les effets se combinent à ceux de la réfraction.

Pour une composante monochromatique de l'éclairement, de longueur d'onde  $\lambda$ , on note  $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ . L'indice de l'eau est noté  $n$ , l'indice de l'air vaut 1. On ne tiendra pas compte des diverses pertes et atténuations qui se produisent aux interfaces et pendant la propagation.

### Partie A. Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

On considère une goutte d'eau sphérique, de rayon  $a$  de diamètre  $D = 2a$ . Le trajet d'un rayon lumineux issu du soleil et parvenant jusqu'à l'œil d'un observateur est représenté sur la figure (2), dans laquelle les échelles ne sont évidemment pas respectées : le soleil se trouve à l'infini et l'observateur à quelques kilomètres de la goutte.

**1.** Rappeler les lois de Descartes puis écrire la relation entre  $i$  et  $r$ . Pourquoi peut-on se contenter d'un dessin bidimensionnel ?

**2.** On appelle « déviation » l'angle  $\theta$  que forment le rayon incident et le rayon émergent. Afin d'avoir une valeur positive, on l'oriente comme l'indique la figure. En utilisant la figure (7) du document réponse, montrer que  $\theta = \pi - 4r + 2i$ .

**3.** On pose  $y = \sin i$ . Exprimer  $\theta$  en fonction de  $y$  puis calculer  $d\theta/dy$ . On rappelle que la dérivée de la fonction  $x \mapsto \arcsin x$  est  $x \mapsto 1/\sqrt{1-x^2}$ .

**4.** Montrer que  $\theta$  passe par un extremum lorsque

$$y = y_m = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$$

puis exprimer la déviation extrême correspondante  $\theta_m$  en fonction de  $n$ . Dans la suite, l'incidence correspondante est notée  $i_m$  et le rayon associé appelé *rayon critique*.

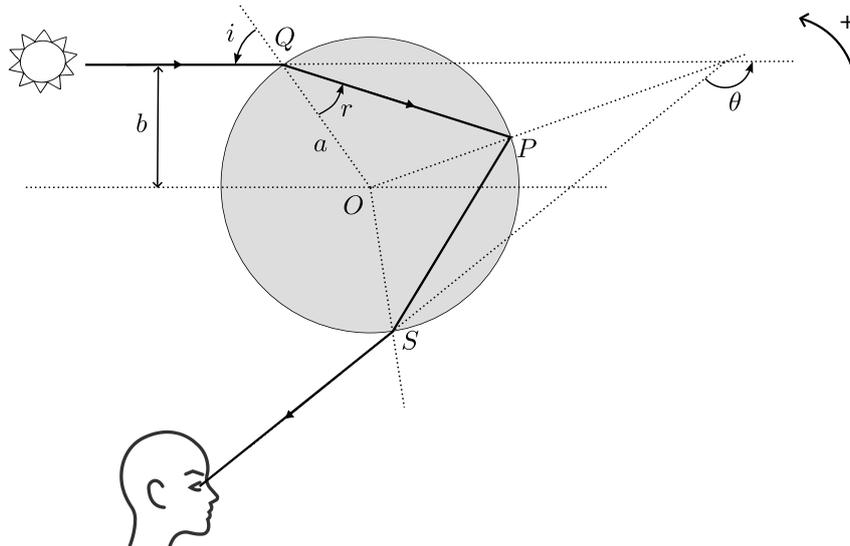
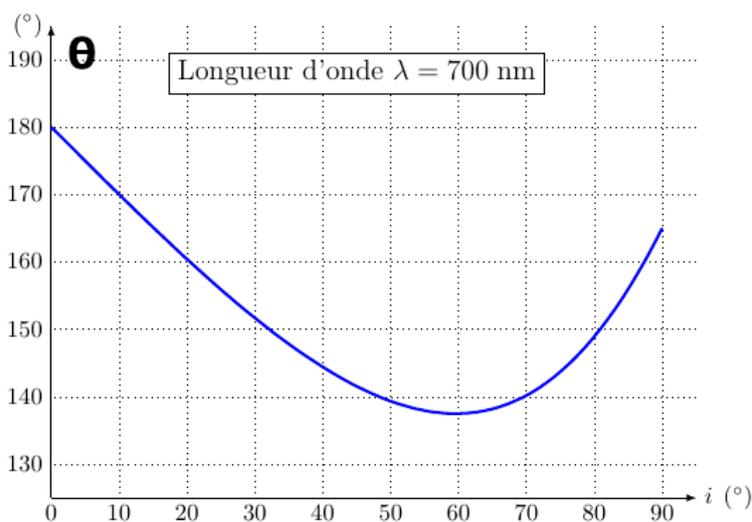


FIGURE 2 – Trajet d'un rayon dans une goutte sphérique

5. La lumière issue du soleil illumine toute une face de la goutte de manière uniforme. La figure (8) montre les variations de  $\theta$  en fonction de  $i$  pour une valeur particulière de  $n$ . En utilisant cette figure, justifier qu'il se produit une accumulation (ou une concentration) de lumière émergente dans la direction critique  $\theta_m$ . Vous utiliserez la reproduction de la figure sur le document-réponse.

FIGURE 3 – Variation de la déviation  $\theta$  en fonction de l'angle d'incidence  $i$ .

6. Pour le bleu ( $\lambda = 400 \text{ nm}$ ,  $n = 1,343$ ) puis pour le rouge ( $\lambda = 700 \text{ nm}$ ,  $n = 1,330$ ), calculer  $\theta_m$  et  $\varphi_m = \pi - \theta_m$ . On exprimera ces angles en degrés.

7. Pour observer l'arc-en-ciel, l'observateur se place dos au soleil comme le montre la figure (9) du document-réponse. Il observe à une distance de quelques kilomètres une zone pluvieuse de l'atmosphère et voit briller les gouttes produisant l'accumulation de lumière évoquée à la question 5. Sur la figure (9), tracer les rayons émergents rouges et bleus dans la direction  $\theta_m$  et faire apparaître l'arc-en-ciel. L'observateur observe-t-il le rouge à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc ?

8. On souhaite préciser la notion d'accumulation de lumière introduite plus haut. On se réfère pour cela à la figure (4). On note  $b = a \sin i = ay$  la « hauteur » à laquelle un rayon rencontre la goutte (voir figure 2). L'élément de surface  $d\sigma = 2\pi b db$  est traversé par des rayons incidents portant une certaine puissance lumineuse. On considère ensuite la sphère tracée en pointillés sur la partie droite : elle a pour rayon  $R \gg a$  et entoure une goutte d'eau située en son centre (non représentée). La même puissance lumineuse ressort de cette sphère entre les angles  $\theta$  et

$\theta + d\theta$ , au travers d'une bande d'aire  $dS$ . On définit la grandeur

$$\Sigma = R^2 \frac{d\sigma}{dS} .$$

a) Montrer que

$$\Sigma = \left| \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} \right| .$$

b) Relier  $\frac{d\theta}{db}$  à  $\frac{d\theta}{dy}$  et une autre variable de l'énoncé.

c) Que dire de  $\Sigma$  si  $\theta \rightarrow \theta_m$  ?

d) Au voisinage de l'extremum  $\theta_m$ , un développement de Taylor à l'ordre 2 permet d'écrire

$$\theta(y) \simeq \theta_m + \frac{1}{2} \theta_m'' (y - y_m)^2$$

où  $\theta_m'' = \frac{9}{2} \frac{\sqrt{4-n^2}}{(n^2-1)^{3/2}}$  est la dérivée  $\frac{d^2\theta}{dy^2}$  évaluée en  $y_m$ . En déduire que  $\Sigma$  est de la forme

$$\Sigma \simeq \frac{\chi}{(\theta - \theta_m)^\beta}$$

en précisant l'expression de  $\chi$  et la valeur de l'exposant  $\beta$ .

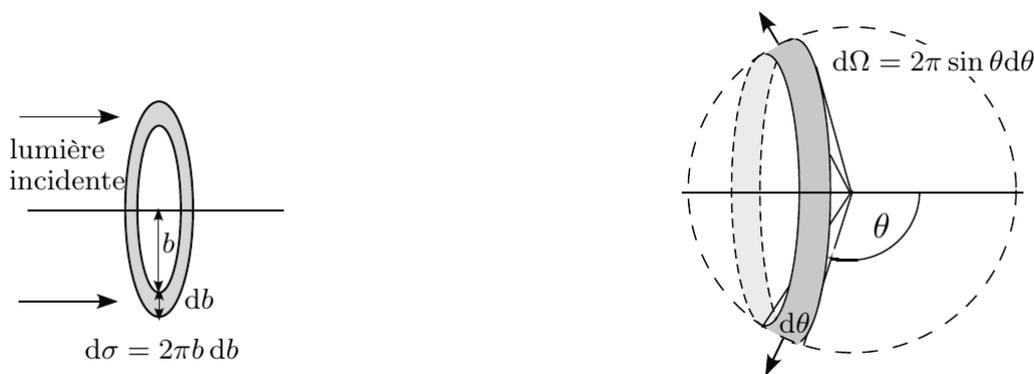


FIGURE 4 – Correspondance entre la lumière incidente et la lumière réfléchie. Attention : le dessin de gauche « devant » une goutte et représente une longueur de l'ordre du rayon  $a$  de la goutte. Le dessin de droite est à une échelle bien plus grande, la goutte très petite étant située au centre de la grande sphère de rayon  $R$ .

### Partie B. Théorie ondulatoire de l'arc-en-ciel (due à Young)

Il est possible d'observer dans un arc-en-ciel, outre les arcs décrits par l'optique géométrique, des arcs supplémentaires (dits « surnuméraires ») résultant d'un phénomène d'interférences (figure 5).

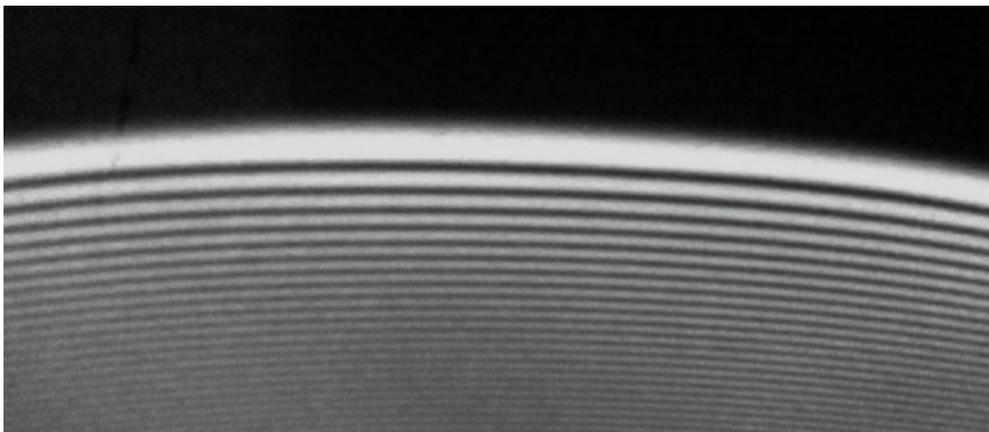


FIGURE 5 – Photographie d'arcs surnuméraires

9. Commençons par rappeler certaines conditions d'observation des interférences lumineuses. Pour cela, on s'éloigne momentanément du contexte de l'arc-en-ciel et on considère une situation plus générale. Deux sources lumineuses ponctuelles  $S_1$  et  $S_2$  émettent deux ondes lumineuses de pulsations respectives  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Ces deux ondes se propagent dans un milieu d'indice  $n$  et interfèrent en un point  $M$  après avoir parcouru les distances  $x_1 = S_1M$  et  $x_2 = S_2M$ . On modélise les amplitudes des ondes en  $M$  par les grandeurs scalaires :

$$s_1(M, t) = a_1 \cos(\omega_1 t - k_1 x_1) \quad s_2(M, t) = a_2 \cos(\omega_2 t - k_2 x_2) \quad .$$

avec  $k_i = n_i \omega_i / c$  ( $i = 1$  ou  $i = 2$ ) et où  $a_1, a_2$  sont des constantes,  $c$  la célérité de la lumière dans le vide.

- Donner un ordre de grandeur de  $\omega_1$  et  $\omega_2$  pour la lumière visible.
- L'intensité lumineuse  $I(M)$  observée à l'œil nu en  $M$  est proportionnelle à la valeur moyenne du carré de l'amplitude reçue en  $M$ , soit :  $I(M) = K \langle s^2(M, t) \rangle_\tau$ . Sur quelle durée  $\tau$  cette valeur moyenne est-elle calculée ?
- Calculer l'intensité  $I(M)$  et montrer qu'elle s'exprime par

$$I(M) = I_1(M) + I_2(M) + I_{12}(M).$$

À quelle(s) condition(s) le terme  $I_{12}$  est-il non nul ?

- Lorsque ces conditions sont réunies, exprimer  $I_{12}$  en fonction de  $I_1, I_2, \lambda$  et d'une grandeur  $\delta(M)$  exprimée en fonction de  $x_1, x_2$  et  $n$ .
- Représenter la courbe des variations de  $I$  en fonction de  $\delta$ . Dans le cas de l'arc-en-ciel, que peut-on dire de  $I_1$  et  $I_2$  en observant la figure (5) ?

On considère deux rayons d'incidences  $i_1 = i_m - \delta i$  et  $i_2 = i_m + \delta i$  très voisines de l'incidence critique  $i_m$ , rencontrant la goutte à des « hauteurs »  $b_m - \delta b$  et  $b_m + \delta b$  (figure 6). Au voisinage de l'extremum en  $i_m$ ,  $\theta$  présente une dépendance quadratique par rapport à  $(y - y_m)$  et à  $(i - i_m)$ , de sorte que ces deux rayons émergent avec la même déviation  $\theta$ , c'est à dire parallèlement l'un à l'autre (mais pas parallèlement au rayon d'incidence  $i_m$ ). De plus, au second ordre près en  $\delta i$ , ils se réfléchissent au même point  $P$ .

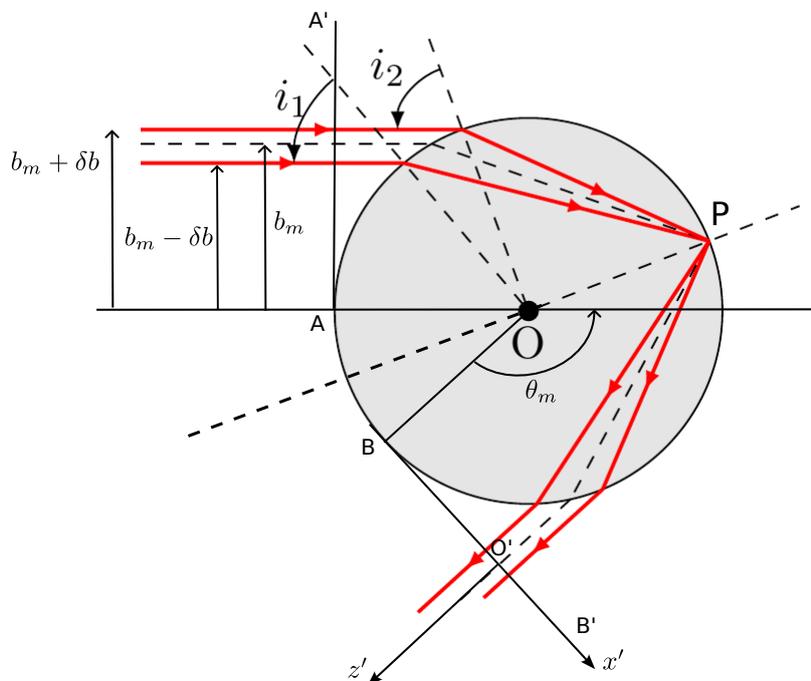


FIGURE 6 – Deux rayons d'incidences  $i_1$  et  $i_2$  très voisines de  $i_m$  et symétriques par rapport à  $i_m$ , émergeant parallèlement l'un à l'autre. Le rayon d'incidence  $i_m$  est tracé en pointillés et l'angle  $i_m$  n'est pas indiqué pour ne pas surcharger la figure.

**10.** Où ces deux rayons émergents interfèrent-ils? Montrer soigneusement en utilisant un schéma que leur différence de marche s'exprime par

$$\delta = D(\cos i_1 - \cos i_2) + 2nD(\cos r_2 - \cos r_1)$$

où  $r_1$  et  $r_2$  sont les angles de réfraction associés à  $i_1$  et  $i_2$ . On pourra exploiter la symétrie de la situation et montrer que la moitié de cette différence de marche s'établit entre l'infini et l'arrivée en  $P$ .

**11.** Exprimer la condition d'interférences constructives. L'écart entre les franges est-il plus grand pour les grosses gouttes ou pour les petites? Justifier qualitativement. Les rayons incidents d'angles d'incidence  $i_1 = 50,13^\circ$  et  $i_2 = 67,98^\circ$  donnent pour une radiation rouge ( $\lambda = 700 \text{ nm}$ ,  $n = 1,330$ ) des rayons émergents parallèles. Quel diamètre de goutte permettra d'observer la frange claire d'ordre 2 dans la direction des rayons émergents?

### Partie C. Surfaces d'onde et rayons

Cette partie prolonge la précédente en l'approfondissant et consiste en une étude détaillée de l'onde formée par les rayons d'incidences voisine de  $i_m$ . Sur la figure (6), on peut déplacer continûment les rayons d'incidence  $i_1$  et  $i_2$  en les éloignant plus ou moins du rayon d'incidence  $i_m$ . On doit donc considérer que  $\delta b$ ,  $\delta i$  et  $\delta\theta = \theta - \theta_m$  prennent tout en ensemble de valeurs (avec  $\delta b \ll b_m$ ,  $\delta i \ll i_m$  et  $\delta\theta \ll \theta_m$ ). Les rayons correspondant ressortent parallèles deux à deux mais présentent des directions variées, ce qui donne à l'onde réfléchie une structure complexe que l'on cherche à préciser. Pour cela, on introduit un repère  $(O', \vec{u}'_x, \vec{u}'_z)$  dans lequel  $\vec{u}'_z$  dirige le rayon critique émergent et  $\vec{u}'_x$  lui est perpendiculaire (figure 6). Les rayons émergents associés aux incidences  $i_1$  et  $i_2$  émergent parallèles entre deux, mais par exactement parallèles à  $\vec{u}'_z$ , avec lequel ils forment un angle  $\delta\theta = \theta - \theta_m$ .

Le document réponse placé à la fin de l'énoncé fournit une vue agrandie près de  $O'$  (figure 10). On y voit, en plus du rayon critique confondu avec  $(O'z')$ , une dizaine de rayons parallèles deux à deux (correspondant à des couples  $+\delta i$ ,  $-\delta i$ ), présentant diverses inclinaisons  $\delta\theta$  (cette inclinaison a été exagérée sur le schéma).

**12.** Rappeler le lien géométrique entre surface d'onde et rayon lumineux. Compléter la figure (10) du document-réponse en y traçant la trace d'une surface d'onde passant par  $O'$ . *Indication : elle présente un point d'inflexion en  $O'$ .*

En notation complexe, le scalaire optique est de la forme

$$\underline{s}(M, t) \propto \exp[i(\omega t - \Psi(x', z'))] \quad .$$

Le symbole  $\propto$  signifie qu'on ne se préoccupe pas de l'amplitude de l'onde, mais seulement de sa phase. Le but est d'étudier ses variations au voisinage de  $O'$ , en un point  $M(x', z')$ .

**13.** Pour  $|\theta - \theta_m| \ll 1$ , justifier que  $\Psi(x', z') \simeq \Psi(x', 0) + kz'$  où  $k = 2\pi/\lambda$ .

**14.** Nous affirmons que la surface d'onde passant par  $O'$  est l'ensemble des points de coordonnées  $(x', z')$  tels que

$$kz' = \Psi(0, 0) - \Psi(x', 0) \quad . \quad (1)$$

Cette relation est-elle en accord avec la définition d'une surface d'onde?

**15.** La relation (1) fournit  $z'$  en fonction de  $x'$  : il existe une fonction  $f$  telle que  $z' = f(x')$  et le graphe de la fonction  $f$  représente la trace de la surface d'onde dans le plan de la figure. Exprimer la pente  $dz'/dx'$  de cette surface d'onde en un point  $M$  d'abscisse  $x'$ , en faisant intervenir une dérivée partielle de  $\Psi$ .

**16.** En considérant le rayon de déviation  $\theta$  passant par  $M$  et le résultat de la question précédente, montrer que

$$\frac{\partial \Psi(x', 0)}{\partial x'} = -k(\theta - \theta_m) \quad .$$

On exploitera le lien géométrique entre surface d'onde et rayon lumineux.

**17.** On rappelle la relation valable près de l'angle critique vue dans la partie A

$$\theta(y) \simeq \theta_m + \frac{1}{2}\theta''_m(y - y_m)^2 \quad .$$

On donne aussi  $x' \simeq a(y - y_m)$ . Des résultats précédents, déduire que

$$\Psi(x', 0) - \Psi(0, 0) = -\frac{1}{6} \frac{k\theta''_m x'^3}{a^2} \quad .$$

**18.** Écrire l'équation de la surface d'onde passant par  $O'$  et la tracer sur un schéma. Est-ce compatible avec le tracé réalisé dans la question 12 ?

**19.** On considère deux rayons parallèles de la figure (10), qui croisent l'axe  $(O'x')$  en des points  $N_2$  et  $N_1$  d'abscisses  $x' > 0$  et  $-x'$ . Exprimer leur déphasage  $\Delta\Psi$  lorsqu'ils croisent cette droite.

**20.** Au delà de cette droite, les rayons, formant un angle  $\delta\theta$  avec  $(O'z')$ , voyagent jusqu'à l'infini où ils interfèrent. Exprimer la différence de marche  $\Delta\mathcal{L}$  puis le déphasage  $\Delta\Psi_{\text{traj}}$  associé à ce trajet jusqu'à l'infini.

**21.** Montrer que le déphasage final des deux rayons qui interfèrent à l'infini est

$$\Delta\Psi_\infty = \frac{2}{3}\theta_m'' \frac{kx'^3}{a^2} \quad .$$

**22.** En déduire l'expression de  $\delta\theta_q = \theta_q - \theta_m$  pour les directions d'interférences constructives  $\theta_q$ , indexée par un entier  $q$ .

**23.** On admet que les arcs surnuméraires ne sont visibles que lorsque leur séparation angulaire avec l'arc primaire est suffisante : pour  $q = 1$ ,  $\delta\theta_q$  doit être supérieur à  $3 \cdot 10^{-2}$  rad. On donne  $\theta_m'' = 9,9$ . Pour  $\lambda = 700$  nm, calculer le rayon de goutte  $a_{\text{lim}}$  limite permettant d'observer les arcs surnuméraires. Cela fonctionne-t-il pour des gouttes de rayon supérieur ou inférieur à  $a_{\text{lim}}$  ?



Document réponse à rendre avec la copie

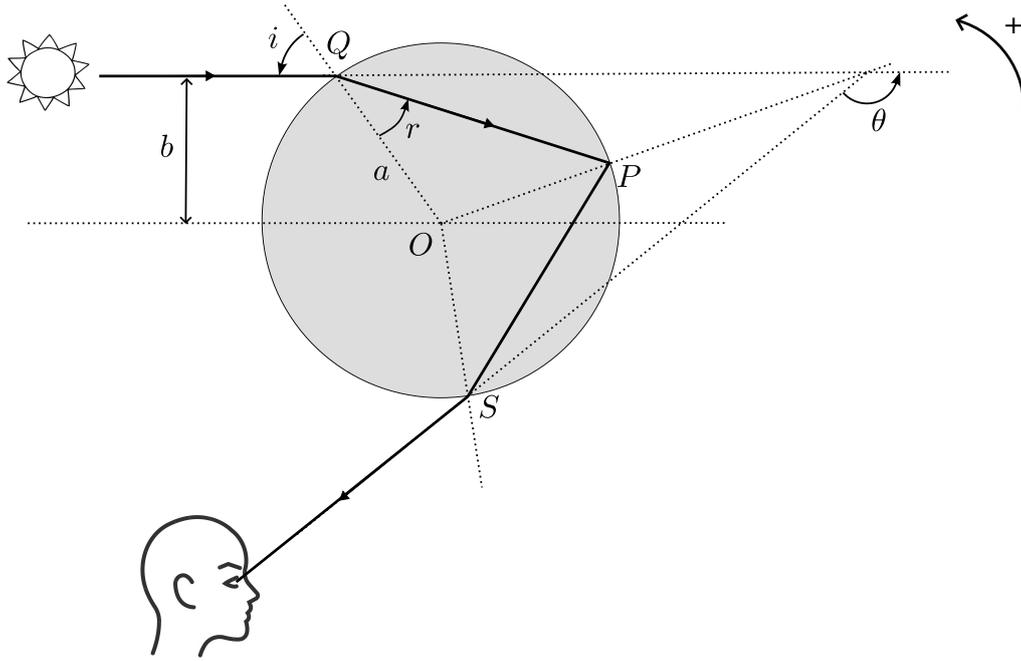


FIGURE 7 – Trajet d'un rayon dans une goutte sphérique

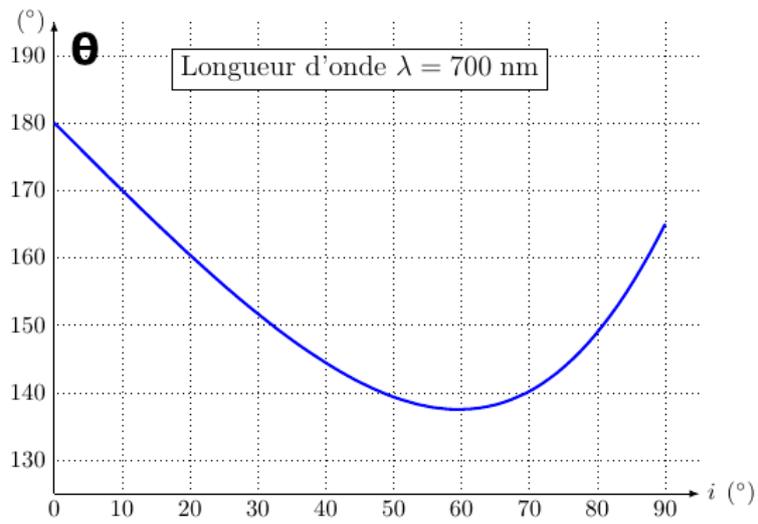
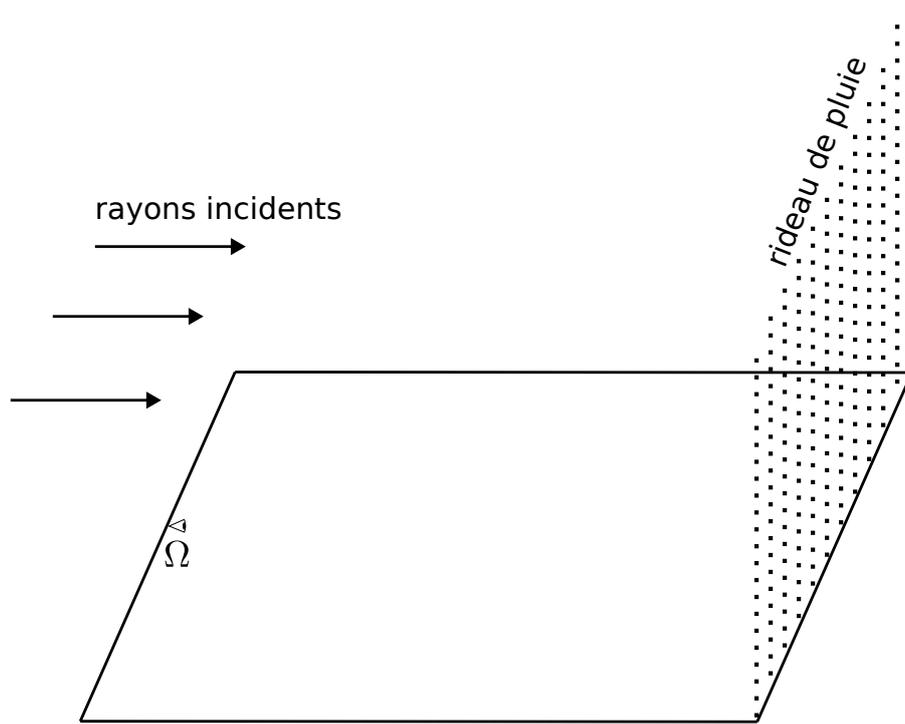
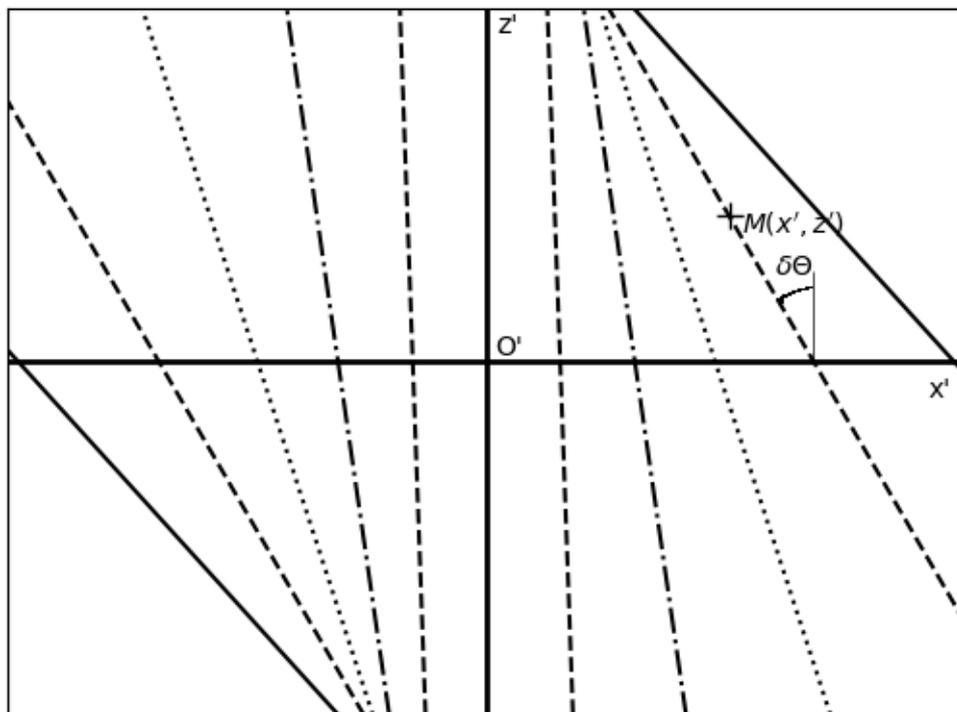


FIGURE 8 – Variation de la déviation  $\theta$  en fonction de l'angle d'incidence  $i$ .

FIGURE 9 – Œil ponctuel situé en  $\Omega$  observant un rideau de pluie éclairé par le soleilFIGURE 10 – Quelques rayons émergeant autour du rayon critique (confondu avec  $(O'z')$ ) et présentant des déviations variées, parallèles deux à deux. En réalité les angles  $\delta\theta$  sont très petits.