Exercice 1. **Décompositions de noyaux (*)**

Partie I — cas scindé à racines simples

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit f un endomorphisme de E.

On considère deux nombres réels a et b distincts. On note $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$ la base de Lagrange de $\mathbb{R}_1[\mathrm{X}]$ associéeà (a, b). On note P le polynôme $(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b)$.

Question 1. Rappeler l'expression de L_1 et L_2.

Question 2. Rappeler la décomposition du polynôme 1 dans la base $(\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2)$.

Question 3. Montrer l'égalité $\mathrm{Ker}(\mathrm{P}(f)) = \mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}_\mathrm{E}) \oplus \mathrm{Ker}(f - b\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ et préciser les projecteurs associés.

Question 4. Dans cette question, on prend $\mathrm{E} = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $f : y \mapsto y'$.
Que donne le résultat de la question 3 dans ce cadre ?

Question 5. Dans cette question, on prend $\mathrm{E} = \mathbb{R}^\mathbb{N}$ et $f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.
Que donne le résultat de la question 3 dans ce cadre ?

Partie II — cas avec une racine double

On garde les notations de la question précédente et on note Q le polynôme $(\mathrm{X}-a)^2(\mathrm{X}-b)$.

Le but de cette partie est de montrer l'égalité

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{Q}(f)) = \mathrm{Ker}((f - a\mathrm{Id}_\mathrm{E})^2) \oplus \mathrm{Ker}(f - b\mathrm{Id}_\mathrm{E})$$

et d'appliquer ce résultat dans deux cadres familiers.

Question 6. Trouver $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant l'égalité polynomiale suivante

$$\lambda(\mathrm{X}-a)^2 + \mu(\mathrm{X}-a)(\mathrm{X}-b) + \nu(\mathrm{X}-b) = 1.$$

Question 7. Montrer que les sous-espaces vectoriels de E définis par

$$\mathrm{F} = \mathrm{Ker}((f - a\mathrm{Id}_\mathrm{E})^2) \quad \text{et} \quad \mathrm{G} = \mathrm{Ker}(f - b\mathrm{Id}_\mathrm{E})$$

sont en somme directe.

Question 8. Montrer ensuite l'égalité annoncée.

Question 9. Résoudre l'équation différentielle

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Question 10. Trouver toutes les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+3} + 2u_{n+2} - 4u_{n+1} - 8u_n = 0.$$

Exercice 2. **Série des intégrales de Wallis (*)**

Question 11. Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, prouver la minoration $\sin(t) \geqslant 2t/\pi$.

Question 12. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{W}_n$ est divergente.

Exercice 3. (**) Soient E et F deux espaces euclidiens. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Question 13. Soit y dans F. Montrer qu'il existe x dans $(\mathrm{Ker}(f))^{\perp}$ et y' dans $(\mathrm{Im}(f))^{\perp}$ vérifiant l'égalité $y = f(x)+y'$.

Montrer de plus qu'un tel couple (x, y') est unique. Le vecteur x est alors noté $g(y)$, ce qui définit une application g de F vers E.

Question 14. Montrer que g est linéaire. Préciser son noyau et son image.

Question 15. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont des projecteurs, à caractériser.

Question 16. On prend $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{F} = \mathbb{R}^2$ et on suppose que f est canoniquement représentée par la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice canoniquement associée à g.

Exercice 4. (***) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives.

Question 17. On suppose que u_n est équivalent à v_n et que la série $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} u_k$ est équivalent à $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} v_k$.

Question 18. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum\limits_{k=n}^{2n-1} \dfrac{1}{2k+1}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. Sa limite est notée ℓ.

Question 19. Trouver un équivalent de $u_n - \ell$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. (**) Dans cet exercice, on étudie la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\sin(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$.

On définit sur $[1, +\infty[$ la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = g(n), \qquad v_n = \int_n^{n+1} g(x)\ \mathrm{d}x, \qquad w_n = v_n - \frac{u_n + u_{n+1}}{2}.$$

Question 20. Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle $[a, b]$, à valeurs réelles. Prouver l'égalité

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{b-a}{2}\,(f(a) + f(b)) - \frac{1}{2}\int_a^b (b-x)(x-a)f''(x)\ \mathrm{d}x.$$

Question 21. En déduire une expression de w_n sous la forme d'une intégrale et prouver que la série de terme général w_n converge absolument.

Question 22. Prouver que la suite $(\cos(n))_{n\geqslant 1}$ n'a pas de limite.

Question 23. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, calculer explicitement $\sum\limits_{k=1}^{n} v_k$ et en déduire que la série de terme général v_n est divergente.

Question 24. Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 6. Exercice 1 du chapitre 2 ou tout autre exercice d'une fiche d'exercices que nous n'aurions pas corrigé en classe.
