PC* — mathématiques **jeudi 3 octobre 2024**
Devoir surveillé n^o 2 **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours et de calcul

Question 1. Rappeler la définition d'une série absolument convergente.

Question 2. Énoncer le théorème des séries alternées.

Question 3. Expliciter la base de Lagrange de $\mathbb{C}_2[\mathrm{X}]$ associée à $(2, 4, -1)$.

Question 4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur z pour que la série $\sum_{n\geqslant 2} 2^{-n} z^{3n-4}$ converge et exprimer sa somme en cas de convergence.

Question 5. On munit $\mathbb{R}^4$ de son produit scalaire canonique.

On considère les vecteurs $a = (1, 0, 1, 0)$ et $b = (2, 1, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^4$ et on pose $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(a, b)$. On note p_F la projection orthogonale sur F.

5.a. Déterminer une base orthogonale de F.

5.b. On pose $c = (0, 1, 1, 1)$. Calculer la distance de c à F.

Problème 1 – autour de la série harmonique alternée

Le but de ce problème est de calculer les sommes

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \right).$$

Pour cela, introduisons quelques notations. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}, \qquad \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n).$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}.$$

On pose aussi $\mathrm{S}_0 = 0$, ce qui permet d'avoir l'égalité $\mathrm{R}_n + \mathrm{S}_n = \mathrm{S}_0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$.

Question 6. Rappeler pourquoi la série de terme général $(-1)^k/k$ est convergente et donner le signe de R_n.

Question 7. Dans cette partie, on calcule R_0 au moyen d'un développement asymptotique de H_n.

7.a. Au moyen de la série $\sum_{n\geqslant 2} (u_n - u_{n-1})$, prouver que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est convergente. On note sa limite γ.

7.b. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $\mathrm{H}_{2n} + \mathrm{S}_{2n} = \mathrm{H}_n$.

7.c. En déduire une expression de S_{2n} en fonction de u_n et u_{2n}.

7.d. Prouver finalement l'égalité $\mathrm{R}_0 = -\ln(2)$.

Question 8. Dans cette partie, on trouve un équivalent de $|\mathrm{R}_n|$ quand n tend vers $+\infty$.

8.a. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver l'égalité

$$|\mathrm{R}_n| = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+2p+1} - \frac{1}{n+2p+2} \right).$$

8.b. En déduire que la suite $(|\mathrm{R}_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

8.c. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver l'égalité

$$|\mathrm{R}_n| + |\mathrm{R}_{n+1}| = \frac{1}{n+1}.$$

8.d. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, en déduire l'encadrement

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant |\mathrm{R}_n| \leqslant \frac{1}{2n}.$$

8.e. En déduire la limite de $n|\mathrm{R}_n|$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 9. Dans cette partie, on calcule la somme de la série $\sum \mathrm{R}_n$.

9.a. Prouver que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \mathrm{R}_n$ est convergente.

9.b. Pour tout N dans $\mathbb{N}$, prouver l'égalité $\sum\limits_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{R}_n = -\frac{1}{2} + (\mathrm{N}+1)\mathrm{R}_{\mathrm{N}} + \frac{(-1)^{\mathrm{N}}}{2}$.

9.c. Conclure.

Problème 2 – suites de carré sommable

On note E l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (x_n)^2$ converge.

Question 10. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, montrer l'inégalité $\frac{a^2+b^2}{2} \geqslant |ab|$.

Question 11. Étant donné deux éléments $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} x_n y_n$ converge absolument.

Question 12. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Question 13. Étant donné deux éléments $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, on pose $\varphi(x,y) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n y_n$.

Montrer que la fonction φ est bien définie sur E × E et que c'est un produit scalaire sur E.

Question 14. On fixe deux éléments p et q distincts de $]-1,1[$. On considère les suites

$$a = (p^n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{et} \qquad b = (q^n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Trouver une base orthogonale de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(a,b)$ pour le produit scalaire φ.

Problème 3 – pour occuper la place qui reste

Question 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ converge puis calculer sa valeur.

On pourra pour cela obtenir une relation de récurrence via une intégration par parties.
