Problème 1 — Inégalités de Hölder et de Minkowski

On fixe p dans $]1,+\infty[$ et on pose $q = \frac{p}{p-1}$. Par commodité, on estime que le nombre 0^p est bien défini et qu'il vaut 0.

Provisoirement, on fixe un entier $n \geqslant 2$. Pour tout élément $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$||x||_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

et on définit $||x||_q$ de manière analogue.

Question 1. Montrer que la fonction $||\ ||_p$ est positivement homogène et qu'elle vérifie la propriété de séparation.

Question 2. Vérifier que q est dans $]1,+\infty[$ et qu'il vérifie l'égalité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Question 3. Pour tout couple (α, β) de $\mathbb{R}^2$, prouver l'inégalité $|\alpha\beta| \leqslant \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$.

Question 4. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer *l'inégalité de Hölder*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant ||x||_p ||y||_q.$$

Pour cela, on appliquera la formule de la question précédente aux nombres x_k/X et y_k/Y pour des choix habiles de X et Y.

Question 5. Soient $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer la majoration

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| \times |x_k + y_k|^{p-1} \leqslant ||x||_p \times \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p\right)^{1/q}.$$

b. Majorer de même la somme $\sum\limits_{k=1}^{n} |y_k| \times |x_k + y_k|^{p-1}$.

c. En déduire *l'inégalité de Minkowski* $||x+y||_p \leqslant ||x||_p + ||y||_p$.

d. Qu'a-t-on démontré ?

Question 6. Soit x dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $||x||_p$ tend vers $||x||_\infty$ quand p tend vers $+\infty$.

Maintenant, on note ℓ^p l'ensemble des suites réelles $u = (u_k)_{k\geqslant 0}$ telles que la série $\sum |u_k|^p$ soit absolument convergente. Pour toute suite u de ℓ^p, on pose

$$\mathrm{N}_p(u) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p\right)^{1/p}.$$

Question 7. Montrer que ℓ^p est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Question 8. Montrer que N_p est une norme sur ℓ^p.

Question 9. Soient $u \in \ell^p$ et $v \in \ell^q$. Montrer que la série $\sum |u_k v_k|$ est convergente et prouver la majoration

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k v_k| \leqslant \mathrm{N}_p(u)\mathrm{N}_q(v).$$

Problème 2 — Polynômes de Laguerre

Dans cet exercice, on étudie une famille de polynômes orthogonale pour un certain produit scalaire sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on introduit les fonctions

$$h_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{t^n}{n!}\mathrm{e}^{-t} \end{array} \quad \text{et} \quad \mathrm{L}_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & h_n^{(n)}(t) \times \mathrm{e}^{t}. \end{array} \tag{1}$$

Question 10. Pour tout entier n, montrer que l'intégrale

$$\mathrm{I}_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t \tag{2}$$

existe et qu'elle vaut $n!$.

Question 11. En déduire que pour tout polynôme réel P, la fonction

$$t \mapsto \mathrm{P}(t)\mathrm{e}^{-t} \tag{3}$$

est intégrable sur $[0, +\infty[$.

Pour tout couple (P, Q) de polynômes réels, on pose

$$(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \int_0^{+\infty} \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t. \tag{4}$$

Question 12. Montrer que la fonction $(\cdot|\cdot)$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Question 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. À l'aide de la formule de Leibniz, obtenir une expression de la fonction L_n. En déduire que cette fonction est polynomiale. Préciser son degré et son coefficient dominant.

Dans la suite, on note encore L_n le polynôme dont L_n est la fonction associée.

Question 14. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

a. Écrire le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction h_n. En déduire que pour tout entier k compris entre 0 et $n-1$, le nombre $h_n^{(k)}(0)$ est nul.

b. Soit P dans $\mathbb{R}[X]$. Pour tout entier p compris entre 0 et n, prouver l'égalité

$$(\mathrm{L}_n|\mathrm{P}) = (-1)^p \int_0^{+\infty} h_n^{(n-p)}(t)\mathrm{P}^{(p)}(t)\ \mathrm{d}t. \tag{5}$$

c. En déduire que la famille $(\mathrm{L}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est orthonormale pour le produit scalaire introduit plus haut.

Question 15. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. À l'aide du polynôme L_n, exprimer le projeté orthogonal de X^n sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
En déduire la valeur de

$$\inf \left\{ \int_0^{+\infty} \left(t^n - \sum_{k=0}^{n-1} a_k t^k \right)^2 \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t\ ;\ (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \right\}. \tag{6}$$

Exercice 1. (*) Pour tout x dans $[0,1]$, on définit la fonction $g_x : t \mapsto t + (x - t^2)/2$.

On définit une suite $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales sur $[0,1]$ en prenant pour P_0 la fonction $x \mapsto 1$ puis en posant, pour tout n dans $\mathbb{N}$,

$$\forall x \in [0,1], \qquad \mathrm{P}_{n+1}(x) = g_x(\mathrm{P}_n(x)).$$

Question 16. Dresser le tableau de variations de g_x sur $[0,1]$.

Question 17. Soit $x \in [0,1]$. Montrer que tous les termes de la suite $(\mathrm{P}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont dans $[0,1]$ et que cette suite est décroissante. En déduire que cette suite converge et déterminer sa limite.

Question 18. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, prouver l'identité

$$\forall x \in [0,1], \qquad \mathrm{P}'_{n+1}(x) = \frac{1}{2} + \mathrm{P}'_n(x)(1 - \mathrm{P}_n(x)).$$

Question 19. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, montrer que la fonction P_n est croissante sur $[0,1]$.

Question 20. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $[0,1]$, obtenir l'encadrement

$$0 \leqslant \mathrm{P}_n(x) - \sqrt{x} \leqslant \mathrm{P}_n(0).$$

Pour l'inégalité de droite, on procédera par récurrence.

Question 21. Montrer que la suite de fonctions $(\mathrm{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

Exercice 2. (*) On considère un élément z de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On pose $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

Question 22. Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t - z}$.

Question 23. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - z^2}$ et préciser sa valeur.

Question 24. Préciser la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - \mathrm{i}}$.

Exercice 3. (**) Pour tout $x > 0$, on pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^x \sin\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$ et $\mathrm{G}(x) = \displaystyle\int_0^x \sin^2\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$.

On pose également $\mathrm{F}(0) = 0$ et $\mathrm{G}(0) = 0$.

a. Prouver que les fonctions F et G sont bien définies et qu'elles sont continues sur $[0,+\infty[$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$.

b. Pour tout $x > 0$, prouver l'égalité

$$\mathrm{F}(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) - \int_0^x 2t \cos\left(\frac{1}{t}\right)\,\mathrm{d}t$$

et en déduire la majoration $|\mathrm{F}(x)| \leqslant 2x^2$.

c. Prouver que la fonction F est dérivable en 0 et préciser la valeur de $\mathrm{F}'(0)$. La fonction F est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[0,+\infty[$?

d. Prouver que la fonction G est dérivable en 0 et préciser la valeur de $\mathrm{G}'(0)$.

e. L'ensemble des fonctions définies de $[0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ qui admettent une primitive est-il stable par produit ?

Exercice 4. (***) Soit f une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. Pour tout x réel, on pose

$$\mathrm{F}(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(t+x) - f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que $\mathrm{F}(x)$ tend vers $2\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(t)|$ quand x tend vers $+\infty$.
