Exercice 1. (*) On fixe α, β, γ dans $]0, +\infty[$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$f_n : x \mapsto x^\alpha n\, \mathrm{e}^{-n^\beta x^\gamma}$$

sur $[0, +\infty[$.

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Cette convergence est-elle uniforme ?

b. Soit $a > 0$. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge uniformément sur l'intervalle $[a, +\infty[$.

Exercice 2. (*) Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}$.

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b. Y a-t-il convergence uniforme sur $\mathbb{R}$? sur $[0, +\infty[$? sur les segments de $[0, +\infty[$?

Exercice 3. (*) On fixe $\alpha > 0$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$f_n : x \mapsto \frac{(nx)^\alpha}{1 + nx^2}$$

sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

a. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$.

b. Étudier la convergence uniforme.

Exercice 4. (**) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$f_n : x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

a. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction exponentielle.

b. Justifier que cette convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Pour cela, on prouvera la majoration $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^y \leqslant \mathrm{e}^x(x - y)$ sous l'hypothèse $x \geqslant y$ et on étudiera les variations de la fonction $\varphi : t \mapsto t - \ln(1 + t)$.

Exercice 5. (**) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle dont les termes sont dans $[0, 1]$. On suppose que cette suite converge et sa limite est notée ℓ.

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies et continues sur $[0, 1]$. On suppose que cette suite de fonctions converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction g.

Montrer que la suite $(f_n(a_n))_{n \geqslant 0}$ converge vers le nombre $g(\ell)$.

Exercice 6. (***) Construire une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues sur $[0, 1]$, à valeurs réelles positives, telle que la suite $(\int_0^1 f_n)_{n \geqslant 0}$ tende vers 0 mais telle que la suite $(f_n(x))_{n \geqslant 0}$ ne tende vers 0 pour aucune valeur de x.

Exercice 7. (**) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui s'annule en 1.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto x^n f(x)$ sur $[0, 1]$.

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers la fonction nulle.
