PC* — mathématiques **samedi 16 novembre 2024**
Devoir surveillé n° 3 — piste bleue **durée : 3 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours et de calcul

Question 1. Donner la définition de la norme infinie sur l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$.

Question 2. Énoncer le théorème des séries alternées.

Question 3. Énoncer le théorème de continuité pour les suites de fonctions.

Question 4. Déterminer l'ensemble des β réels pour lesquels l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^{\beta-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Problème 1

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les fonctions polynomiales

$$f_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} x^k \quad \text{et} \quad g_n : x \mapsto \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}.$$

Partie I

Question 5. Rappeler vers quelle fonction f la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur l'intervalle $]-1,1[$.

Question 6. Pour tout $r \in [0,1[$, montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur le segment $[0,r]$.

Question 7. À l'aide du théorème de passage à la limite sous l'intégrale, en déduire que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $[0,1[$ vers $g : x \mapsto -\ln(1-x)$.

Question 8. Pour tout $r \in [0,1[$, montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur le segment $[0,r]$.

Partie II

Question 9. Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que l'équation $g_n(x) = 1$ possède exactement une solution dans $]0,1[$. Cette solution est notée b_n.

Question 10. Calculer b_2.

Question 11. Pour tout entier $n \geqslant 2$, vérifier l'inégalité $g_{n+1}(b_n) \geqslant g_{n+1}(b_{n+1})$ et en déduire l'inégalité $b_n \geqslant b_{n+1}$.

Question 12. Justifier que la suite $(b_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente. Sa limite est notée ℓ.

Question 13. Montrer que $g_n(b_n)$ tend vers $g(\ell)$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 14. En déduire la valeur de ℓ.

Problème 2

En travaux dirigés, on a obtenu l'égalité $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\ln(3)$.

Le but de ce problème est de généraliser ce calcul en obtenant une valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n+1}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Question 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^{2n+1}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente. Sa valeur est notée I_n.

Dans toute la suite du problème, on **fixe** un entier n strictement positif.

Question 16. Pour tout t réel, prouver l'égalité

$$\sin^{2n+1}(t) = \frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k \sin((2n+1-2k)t).$$

On exploitera la symétrie des coefficients binomiaux pour regrouper les termes.

Question 17. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 1, en déduire l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k (2n+1-2k) = 0.$$

Question 18. Pour tout $x > 0$, montrer l'égalité

$$\int_x^{+\infty} \frac{\sin^{2n+1}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{(-1)^n}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} (-1)^k (2n+1-2k) \int_x^{(2n+1-2k)x} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Question 19. Soit $\alpha > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_x^{\alpha x} \frac{\sin(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u$ tend vers $\ln(\alpha)$ quand x tend vers 0.

Question 20. Obtenir finalement une expression de I_n.

Problème 3

On définit sur $]0,1[$ la fonction $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1-t^2}$ ainsi que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les fonctions

$$g_n : t \mapsto t^{2n}\ln(t) \quad \text{et} \quad h_n : t \mapsto \sum_{k=0}^{n} t^{2k}\ln(t).$$

Question 21. Vérifier que la fonction f possède une limite finie en 1.

Question 22. Justifier que la fonction f est intégrable sur $]0,1[$.

Question 23. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier que la fonction g_n est intégrable sur $]0,1]$ et calculer son intégrale.

Question 24. À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que $\displaystyle\int_0^1 h_n(t)\,\mathrm{d}t$ tend vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers $+\infty$.

Question 25. En déduire une expression de $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ sous forme d'une somme de série.
