PC* — mathématiques **samedi 16 novembre 2024**
Devoir surveillé n° 3 — piste rouge **durée : 3 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Problème 1

On note E_0 le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$, à valeurs réelles, nulles en 0.
On note E_1 l'ensemble des f appartenant à E_0 telles que la fonction $t \mapsto (f(t)/t)^2$ soit intégrable sur $]0,+\infty[$.
On note E_2 l'ensemble des f appartenant à E_0 telles que la fonction $(f')^2$ soit intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

L'objectif de ce problème est de justifier que les ensembles E_1 et E_2 sont des sous-espaces vectoriels de E_0, de comparer ces ensembles et de comparer deux normes.

Partie I — propriétés algébriques

Question 1. Pour tout couple (α,β) d'éléments de $\mathbb{R}$, prouver la majoration $|\alpha\beta| \leqslant \dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}$.

Question 2. Pour tout couple (f,g) d'éléments de E_1, prouver que la fonction $t \mapsto f(t)g(t)/t^2$ est intégrable sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Question 3. En déduire que E_1 est un sous-espace vectoriel de E_0.

Pour tout couple (f,g) d'éléments de E_1, on pose $\varphi_1(f,g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(t)g(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Question 4. Prouver que la fonction φ_1 est un produit scalaire sur E_1. La norme euclidienne associée à φ_1 est notée N_1.

La même méthode permettait de prouver que pour tout couple (f,g) d'éléments de E_2, la fonction $t \mapsto f'(t)g'(t)$ est intégrable sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On admet ce résultat.

On admet de même que E_2 est un sous-espace vectoriel de E_0.

Pour tout couple (f,g) d'éléments de E_2, on pose $\varphi_2(f,g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t$.

Question 5. Prouver que la fonction φ_2 est un produit scalaire sur E_2 (on justifiera uniquement le caractère défini positif). La norme euclidienne associée à φ_2 est notée N_2.

Partie II — une inclusion

Dans les questions qui suivent, on se donne une fonction f appartenant à l'ensemble E_0 et on lui associe les fonctions g et h définies sur $]0,+\infty[$ par

$$\forall t>0, \qquad g(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t}}, \qquad h(t) = \frac{f(t)}{t}.$$

Question 6. Soit $x>0$. Prouver que les fonctions h^2 et $t \mapsto t(g'(t))^2$ sont intégrables sur $]0,x]$.

Question 7. Soit $x>0$. Prouver l'égalité

$$\int_0^x (f'(t))^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(g(x))^2 + \int_0^x t\,(g'(t))^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{4}\int_0^x (h(t))^2\,\mathrm{d}t.$$

Question 8. Dans cette question, on suppose de plus que la fonction f appartient à E_2. Prouver alors qu'elle appartient aussi à E_1.

On a donc prouvé l'inclusion $\mathrm{E}_2 \subset \mathrm{E}_1$.

Question 9. À l'aide de la fonction sinus, prouver que l'inclusion $\mathrm{E}_1 \subset \mathrm{E}_2$ est fausse.

Partie III — comparaison de deux normes

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\sin(nt)$.

Question 10. Pour toute fonction f de E_2, prouver l'inégalité $\mathrm{N}_1(f) \leqslant 2 \times \mathrm{N}_2(f)$.

Question 11. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver que la fonction f_n est un élément de E_2.

Question 12. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, calculer $\mathrm{N}_2(f_n)^2$.

Question 13. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, prouver l'égalité

$$\mathrm{N}_1(f_n)^2 = n \times \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-2u/n}\sin^2(u)}{u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Question 14. En appliquant le théorème de convergence dominée, montrer que $\mathrm{N}_1(f_n)^2$ est équivalent à $\mathrm{C} \times n$ pour une certaine constante C strictement positive.

Question 15. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

Problème 2

On fixe un entier $p \geqslant 2$. Pour toute matrice $\mathrm{M} = (\mathrm{M}_{k,\ell})_{1\leqslant k,\ell\leqslant p}$ de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on pose

$$||\mathrm{M}|| = \max\left\{\sum_{\ell=1}^{p} |\mathrm{M}_{k,\ell}| \ ;\ k \in [\![1,p]\!]\right\}.$$

On admet ce qui a été vu en travaux dirigés, à savoir que $||\mathrm{M}||$ est une norme sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et qu'elle est sous-multiplicative :

$$\forall (\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})^2, \quad ||\mathrm{MN}|| \leqslant ||\mathrm{M}|| \times ||\mathrm{N}||.$$

On fixe une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. On suppose qu'elle est triangulaire supérieure et on pose $\rho = \max\{|\mathrm{A}_{1,1}|,\ldots,|\mathrm{A}_{p,p}|\}$.
Pour tout $r > 0$, on note P_r la matrice diagonale de coefficients diagonaux $(r, r^2, \ldots, r^p)$.
Enfin, pour tout $r > 0$ et toute $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on pose $\mathrm{N}_r(\mathrm{M}) = ||\mathrm{D}_r^{-1}\mathrm{M}\mathrm{D}_r||$.

Question 16. Montrer que N_r est une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Question 17. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, justifier l'inégalité $\mathrm{N}_r(\mathrm{A}^n) \leqslant \mathrm{N}_r(\mathrm{A})^n$.

Question 18. Dans cette question, on suppose que la suite $(\mathrm{A}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle. Montrer que $\rho < 1$.

Question 19. Montrer que $\mathrm{N}_r(\mathrm{A})$ tend vers ρ quand r tend vers 0.

Question 20. On suppose maintenant que $\rho < 1$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{N}_r(\mathrm{A}) < 1$ et en déduire que la suite $(\mathrm{A}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la matrice nulle.

Question 21. On suppose de nouveau que $\rho < 1$. Justifier que la matrice $\mathrm{I}_p - \mathrm{A}$ est inversible et que la suite de terme général

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{A}^k$$

converge vers $(\mathrm{I}_p - \mathrm{A})^{-1}$.
