PC* 25 - DEVOIR N° 8

corrigé

Double vitrage

1. a) On applique la loi de Wien $\lambda_{\max}T = w_0$ pour calculer, à chacune des deux températures, la longueur d'onde à laquelle le rayonnement est le plus intense.

— Pour $T = T_1 = 300\,\text{K}$, $\lambda_{\max 1} = 9,7\,\mu\text{m}$ infrarouge

— Pour $T = T_2 = 5800\,\text{K}$, $\lambda_{\max 2} = 0,50\,\mu\text{m}$ visible

b) Le verre est transparent pour la lumière visible et donc aussi pour le rayonnement solaire qui est concentré autour de $\lambda_{\max 2}$ appartenant au domaine visible. Au contraire, on sait que le verre est opaque aux infrarouges et donc au rayonnement émis par les corps à température ambiante qui est concentré autour de $\lambda_{\max 1}$. Il absorbe intégralement ces rayonnements IR et peut donc être traité comme un corps noir.

c) Soit λ_0 la longueur d'onde pour laquelle le verre change de comportement, entre le visible et l'infrarouge lointain. L'argumentation de la question précédente exige que l'essentiel du rayonnement solaire de fasse à des longueurs d'ondes inférieures à λ_0, donc $\lambda_0 > 8\lambda_{\max 2} = 4\,\mu\text{m}$. De même, il faut que l'essentiel du rayonnement émis par les corps à température ambiante se fasse à des longueurs d'onde supérieures à λ_0, donc $\lambda_0 < 0,5\,\lambda_{\max 1} = 5\,\mu\text{m}$. En conclusion, λ_0 est sans doute voisin de 4 ou $5\,\mu\text{m}$. Si la valeur est plus proche de $3\,\mu\text{m}$, comme certains constructeurs l'indiquent, une partie du rayonnement solaire sera absorbée.

2. Soit φ_e le rayonnement émis par le corps noir et ϕ_{v1} celui émis par chacune des faces de la vitre. L'équilibre thermique de chacun des corps rayonnant donne

$$\begin{cases} \varphi_e = \varphi_s + \varphi_{v1} \\ 2\varphi_{v1} = \varphi_e \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \varphi_{v1} = \varphi_s \quad \text{et} \quad \varphi_e = 2\varphi_s \quad .$$

Comme $\varphi_e = \sigma T_{\text{CNa}}^4$ on en déduit $T_{\text{CNa}} = \left(\frac{2\varphi_s}{\sigma}\right)^{1/4} = 433\,\text{K}$.

3. À l'équilibre on a maintenant

$$\begin{cases} \varphi_e = \varphi_s + \varphi_{v2} \\ 2\varphi_{v2} = \varphi_e + \varphi_{v1} \\ 2\varphi_{v1} = 2\varphi_{v2} \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \varphi_{v1} = \varphi_s \quad \varphi_{v2} = 2\varphi_s \quad \varphi_e = 3\varphi_s \quad .$$

On en déduit $T_{\text{CNb}} = \left(\frac{3\varphi_s}{\sigma}\right)^{1/4} = 480\,\text{K}$.

4. a) Comme la vitre a une capacité thermique négligeable, elles atteint l'équilibre en un temps très inférieur à τ_a et on peut la supposer à l'équilibre à chaque instant : elle émet autant de rayonnement qu'elle en reçoit et on a comme plus haut $\varphi_e = 2\varphi_{v1}$ donc $\varphi_{v1} = \varphi_e/2$. Le premier principe appliqué au corps noir entre les instants t et $t + dt$ donne

$$C(T(t+dt) - T(t)) = A\varphi_{v1} - A\varphi_e = A\varphi_e/2 - A\varphi_e = -A\varphi_e/2$$
$$C\frac{dT}{dt} = -\frac{A\sigma}{2}T^4 \quad .$$

Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire. On peut la résoudre approximativement sur la durée où T ne s'éloigne pas beaucoup de la température initiale T_2. Pour cela on pose $T = T_2 + \epsilon$ et on remarque que $T^4 \simeq T_2^4 + 4\epsilon T_2^3$. L'équation différentielle devient alors

$$C\frac{d\epsilon}{dt} = -\frac{A\sigma}{2}T_2^4 - 2A\sigma T_2^3\epsilon \qquad \frac{d\epsilon}{dt} + \frac{1}{\tau}\epsilon = -\frac{1}{4\tau}T_2^3 \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{c}{2A\sigma T_2^3} \quad .$$

On résout en tenant compte du second membre et avec la condition initiale $\epsilon(0) = 0$ pour trouver

$$\epsilon = \frac{T_2}{4}\left(e^{-t/\tau} - 1\right) \quad .$$

L'instant τ_a est tel que $\epsilon = T_1 - T_2$. On obtient

$$\tau_a = -\tau \ln\left(1 + \frac{4(T_1 - T_2)}{T_2}\right) = 20\,\text{min}5\,\text{s} \quad .$$

Plutôt que de linéariser, on peut séparer les variables dans l'équation différentielle puis intégrer entre les instants $t = 0$ et $t = \tau_a$.

$$\frac{dT}{T^4} = -\frac{A\sigma}{2C}dt \qquad \int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T^4} = -\frac{A\sigma}{2C}\int_0^{\tau_a} dt \qquad \left[-\frac{1}{3T^3}\right]_{T_2}^{T_1} = -\frac{A\sigma}{2C}\tau_a$$

$$\tau_a = \frac{2C}{3\sigma A}\left(\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_2^3}\right) = 19\,\text{min}\,30\,\text{s} \quad .$$

b) On a toujours équilibre des deux vitres : $2\varphi_{v1} = \varphi_{v2}$ et $2\varphi_{v2} = \varphi_e + \varphi_{v1}$. En éliminant φ_{v1}, on en tire la relation $\varphi_{v2} = 2\varphi_e/3$. Le premier principe appliqué au corps noir donne alors

$$C\left(T(t+dt) - T(t)\right) = -A\varphi_e + A\varphi_{v2} = -\frac{1}{3}A\varphi_e \quad .$$

Par rapport au calcul de la question précédente, le facteur 1/2 a été remplacé par un facteur 1/3, les pertes se trouvant en quelque sorte réduites. La suite du calcul se déroule de manière analogue et on obtiendra

$$\tau_b = \frac{3}{2}\tau_a \quad .$$

5. a) La vitre supérieure émet le flux surfacique φ_{v1} en direction de l'autre vitre et le flux surfacique $\varphi'_{v1} = \varphi_{v1}/2$ vers l'extérieur. Les relations traduisant l'équilibre des deux vitres et du corps noir s'écrivent

$$\begin{cases} \varphi_{v1} + \frac{1}{2}\varphi_{v1} = \varphi_{v2} \\ \varphi_e + \varphi_{v1} = 2\varphi_{v2} \\ \varphi_s + \varphi_{v2} = \varphi_e \end{cases}$$

On en déduit $\varphi_{v1} = 2\varphi_s$ puis $\varphi_{v2} = 3\varphi_s$ et $\varphi_e = 4\varphi_s$ d'où

$$T_{\text{CNc}} = \left(\frac{4\varphi_s}{\sigma}\right)^{1/4} = 515\,\text{K} \quad .$$

b) Les vitres sont toujours en équilibre donc

$$\begin{cases} \varphi_{v1} + \frac{1}{2}\varphi_{v1} = \varphi_{v2} \\ \varphi_e + \varphi_{v1} = 2\varphi_{v2} \end{cases}$$

On en déduit $\varphi_{v2} = \frac{3}{4}\varphi_e$. L'application du premier principe au corps noir donne

$$C\frac{dT}{dt} = A\varphi_{v2} - A\varphi_e = -\frac{A}{4}\varphi_e = -\frac{A}{4}\sigma T^4 \quad .$$

On retrouve la même équation qu'à la question 4a, au remplacement près du facteur 1/2 par le facteur 1/4. La suite des calculs se déroule de manière analogue et conduit à $\tau_c = 2\tau_a$.

6. a) Le double vitrage est la mise en série des deux vitres de résistance thermique $R_v = e/(\lambda_v A)$ et de la couche de gaz de résistance thermique $R_{gaz} = L/(\lambda A) = 0,42\,\text{K.W}^{-1}$. Il a donc pour résistance thermique

$$R_{th} = R_v + R_{gaz} + R_v = \frac{1}{A}\left(\frac{2e}{\lambda_v} + \frac{L}{\lambda}\right) \qquad R_{th} = 0,43\,\text{K.W}^{-1} \quad .$$

Presque toute la résistance thermique est due à la couche d'air.

b) Soit L_1 l'épaisseur d'air et L_2 l'épaisseur d'argon donnant la même résistance thermique. On a

$$\frac{L_1}{A\lambda_1} = \frac{L_2}{A\lambda_2} \qquad L_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}L_1 = 0,74\,\text{L}_1 = 7,4\,\text{mm} \quad .$$

7. a) De gauche à droite circule le flux $\sigma T_{v1}^4 A$ émis par la vitre 1 et en sens inverse le flux $\sigma T_{v2}^4 A$ émis par la vitre 2. Le flux net de gauche à droite est donc $\phi_{rad} = \sigma A(T_{v1}^4 - T_{v2}^2)$.

b) Les températures T_{v1} et T_{v2} sont voisines d'une même valeur notée T_v comprise entre 293 K et 303 K, qu'on peut prendre égale à 298 K. Dans ces conditions,

$$\phi_{rad} \simeq 4\sigma T_v^3 \left(T_{v1} - T_{v2}\right) \quad .$$

Ce flux est proportionnel à l'écart de température entre les faces internes des deux vitres de sorte qu'on peut introduire une conductance thermique caractérisant les échanges radiatifs entre les deux vitres

$$G_{rad} = 4\sigma T_v^3 \quad .$$

D'une vitre à l'autre, deux flux circulent parallèlement : le flux radiatif et le flux conductif décrit par R_{air}. La lame d'air séparant les deux vitres a donc pour résistance thermique

$$R_{lame} = \frac{1}{G_{rad} + \frac{1}{R_{air}}} = \frac{1}{4\sigma A T_v^3 + \frac{\lambda_1 A}{L}} \quad .$$

Le double vitrage dans son ensemble a pour résistance

$$R_{th} = 2R_v + R_{lame} \quad .$$

Numériquement, $G_{air} = 1/R_{air} = 2,4\,\mathrm{W.K^{-1}}$, $G_{rad} = 6,0\,\mathrm{W.K^{-1}}$ et $R_{th} = 0,13\,\mathrm{K.W^{-1}}$. La prise en compte du rayonnement abaisse de 70% la résistance thermique du double vitrage.

I Modèle à deux faisceaux pour l'équilibre radiatif de l'atmophère

1. En appliquant la loi de Wien on trouve $\lambda_{\text{max,Terre}} = 1.10^1\,\mu$m. 98% du flux est rayonné entre 5 μm et $8.10^1\,\mu$m, dans l'infrarouge.

2. Pour le Soleil, on voit que la longueur d'onde d'émission maximale est $\lambda_{\text{max},\odot} = 0,5\,\mu$m d'où on déduit $T_\odot = 5,8.10^3$ K. L'intervalle concentrant 98% de la puissance est $[0,25\,\mu\text{m}; 4\,\mu\text{m}]$. Cet intervalle est centré sur le visible et disjoint du précédent. Cette remarque est fondamentale pour l'explication de l'effet de serre et plus généralement pour le bilan radiatif de la Terre : l'absorption par l'atmosphère est forte dans l'IR mais négligeable dans le visible.

3. Une relation analogue est sous-jacente à la loi de Beer-Lambert donnant l'absorbance d'une solution. En physique du laser, on utilise le même genre de loi pour décrire l'atténuation (ou l'amplification) du faisceau.

4. En traversant la couche d'épasseur dz, le flux montant perd $k\rho U dz$ et est renforcé du terme d'émission $k\rho dz B$.

$$U(z+dz) = U(z) - k\rho U dz + k\rho dz B \qquad \frac{dU}{dz} = k\rho(B-U)$$

5. Comme $d\tau = -k\rho dz$, la relation précédent devient

$$\frac{dU}{d\tau} = \frac{dU}{dz}\frac{dz}{d\tau} = k\rho(B-U) \times \frac{-1}{k\rho} \qquad \frac{dU}{d\tau} = U - B \quad .$$

6. On reprend le raisonnement pour le rayonnement ascendant. En parcourant dz (vers le bas), il perd $k\rho dz D$ et est renforcé par le rayonnement thermique émis.

$$D(z) = D(z+dz) - k\rho dz D + k\rho dz B \qquad -\frac{dD}{dz} = rk\rho(B-D) \qquad \frac{dD}{d\tau} = B - D$$

On peut obtenir directement la réponse en remarquant qu'il suffit de reprendre le résultat de la question précédente et d'y remplacer U par D d'une part et dz par $-dz$ d'autre part.

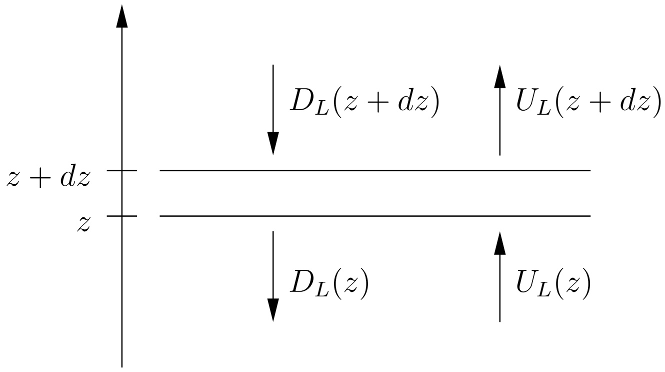
7. En faisant la différence et la somme des équations établies dans les deux questions précédentes, on obtient

$$\frac{d(U-D)}{d\tau} = U + D - 2B \tag{1}$$

$$\frac{d(U+D)}{d\tau} = U - D \quad . \tag{2}$$

8. Pendant une durée dt, la tranche d'air de section S située en les cotes z et $z+dz$ reçoit l'énergie

$$\delta Q = (U(z) + D(z+dz) - U(z+dz) - D(z))Sdt \quad .$$



Comme cette tranche est en régime permanent, le premier principe mène à $\delta Q = 0$ d'où

$$\frac{d(U-D)}{dz} = 0 \quad .$$

Voici une autre réponse. La tranche d'épaisseur dz absorbe la puissance $k\rho dz(U+D)$ et elle émet la puissance $2k\rho dz B$. À l'équilibre, la puissance absorbée est égale à la puissance émise : $k\rho dz(U+D) = 2k\rho dz B$ donc $U + D = 2B$. En utilisant le résultat de Q7, on en déduit $d(U-D)/dz = 0$.

9. Le seul rayonnement descendant en haut de l'atmosphère est le rayonnement solaire qui, d'après la question 2, ne porte pratiquement pas d'énergie au delà de $5\,\mu$m, c'est à dire sur le domaine de longueur d'onde envisagé ici. On a donc $D(\tau = 0) = 0$.

10. La relation obtenue à la question (**8.**) permet d'écrire qu'il existe une constante C telle que $U(\tau) - D(\tau) = C$. En évaluant cette relation en $\tau = 0$, on déduit que $C = U_t$. En intégrant la seconde relation de la question 7, on a alors

$$U(\tau) + D(\tau) = U_{Lt}\tau + C'$$

où C' est une constante que l'on peut évaluer en $\tau = 0$: $C' = U_t$. Connaissant $U - D$ et $U + D$, on trouve facilement

$$U(\tau) = U_t\left(1 + \frac{\tau}{2}\right) \qquad D(\tau) = U_t\frac{\tau}{2}$$

Enfin, la première relation de la question 7 conduit à

$$B(\tau) = U_t\frac{1+\tau}{2} \quad .$$

11. D'après la loi de Stefan, $B = \sigma T^4$, et comme $B = U_t(\tau+1)/2$, on en déduit

$$\sigma T^4(z) = \frac{U_{Lt}}{2}\left(1 + \tau_0 \exp(-z/H_a)\right) \quad .$$

12. L'albédo α représente la proportion du rayonnement solaire réfléchi par les nuages, l'atmosphère et le sol. Ainsi, seule un proportion $(1-\alpha)$ du rayonnement solaire est absorbée par le sol. Cette puissance solaire est interceptée par un disque de rayon le rayon terrestre. Ainsi, la puissance solaire absorbée a pour expression

$$P_{\text{abs}} = \pi {R_t}^2(1-\alpha)F \quad .$$

Dans le modèle étudié ici, la température est indépendante de la latitude et de la longitude ; le flux U_t émis au sommet de l'atmosphère est uniforme. La puissance totale émise est donnée par

$$P_{\text{em}} = 4\pi R_t^2 U_t \quad .$$

Comme la Terre est globalement à l'équilibre, on a $P_{\text{abs}} = P_{\text{em}}$ d'où

$$U_t = \frac{(1-\alpha)F}{4} = 238\,\text{W.m}^{-2} \quad .$$

13. Le sommet de la troposphère est défini par $\tau = 0$ (ou $z \gg H_a$). Le résultat de la question 11 donne

$$T_t = \left(\frac{U_t}{2\sigma}\right)^{1/4} = 214\,\mathrm{K} \quad .$$

Au sol, $z = 0$ donc

$$T(0) = \left(\frac{U_t(1+\tau_0)}{2\sigma}\right)^{1/4} = 335\,\mathrm{K} \quad .$$

La valeur obtenue pour T_t est en accord avec celle mesurée, mais ce n'est pas le cas pour $T(0)$.

14. En dérivant l'expression de la question 11, on obtient

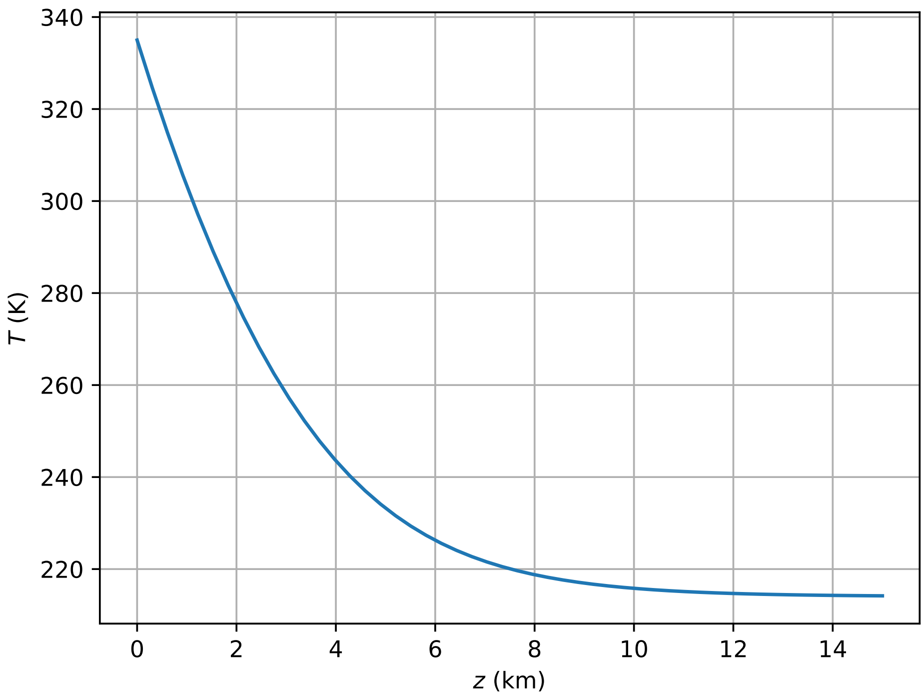
$$4\sigma T^3 \frac{dT}{dz} = -\frac{\tau_0 U_t}{2H_a} e^{-z/H_a} \quad .$$

En évaluant cette relation en $z = 0$, on trouve

$$\left|\frac{dT}{dz}(0)\right| = \frac{U_t \tau_0}{8\sigma H_a T_0^3} = 35\,\mathrm{K.m^{-1}} \quad .$$

Ce gradient n'est pas en accord avec la valeur mesurée (donnée dans la partie suivante).

15. On représente graphiquement la fonction $z \to T(z) = \left[\frac{U_{Lt}}{2\sigma}(1 + \tau_0 \exp(-z/H_a))\right]^{1/4}$.



16.

$$T_e = \left(\frac{U_t}{\sigma}\right)^{1/4} = 2^{1/4} T_t = 254\,\mathrm{K}.$$

On remarque que

$$T_t < T_e < T_0 \quad .$$

La température d'émission est la température que calculerait un extraterrestre en mesurant le rayonnement U_t qu'il recevrait et en l'interprétant comme celui d'un corps noir. En réalité, le rayonnement émis par la Terre est issu de diverses couches situées entre le sol et le sommet de l'atmosphère ; la température effective de ce rayonnement est comprise entre T_t et T_0.

II Équilibre radiatif et convectif

1. Avec les résultats de la partie précédente, on trouve

$$\frac{B}{U}=\frac{1+\tau}{2}\times\frac{1}{1+\tau/2} \tag{3}$$

Pour $z=H_t$, la relation (4) de l'énoncé donne $B/U=1/2$. Or $z=H_t$ est associé à $\tau=0$. L'expression (3) ci-dessus, évaluée en $\tau=0$, donne $B/U=1/2$. Les deux résultats sont identiques.

Pour $z=0$, la relation (4) de l'énoncé donne $B/U=1$ et l'expression (3) évaluée pour $\tau=\tau_0=5$ donne $B/U=6/7$. En première approximation, les résultats sont compatibles.

2.

$$\frac{d\ln U}{d\tau}=\frac{1}{U}\frac{dU}{d\tau}=\frac{1}{U}(U-B) \qquad \text{en utilisant la question 5}$$
$$\frac{d\ln U}{d\tau}=1-\frac{B}{U} \quad \text{donc} \quad \frac{d\ln U}{d\tau}=\frac{z}{2H_t} \qquad \text{en utilisant la relation 4 de l'énoncé.}$$

3.

$$\frac{d\ln U}{dz}=\frac{d\ln U}{d\tau}\frac{d\tau}{dz}$$
$$\frac{d\ln U}{dz}=-\frac{z}{2H_t}\times\frac{\tau_0}{H_a}e^{-z/H_a}$$

4. Intégrons la relation précédente entre $z=0$ et $z=H_t$. On obtient

$$\ln\frac{U(H_t)}{U(0)}=-\frac{\tau_0}{2H_tH_a}\int_0^{H_t} ze^{-z/H_a}\,dz=-\frac{\tau_0}{2H_tH_a}\times H_a^2\int_0^{H_t/H_a} ue^{-u}du \quad .$$

Comme H_t est plusieurs fois supérieur à H_a, on peut avec une bonne précision remplacer la borne supérieure par $+\infty$. L'intégrale se calcule par parties et vaut $1/2$. On obtient donc

$$\ln\frac{U(H_t)}{U(0)}\simeq-\frac{\tau_0H_a}{2H_t} \quad .$$

5. La relation (4) de l'énoncé donne $B(0)/U(0)=1$ donc $U(0)=B(0)=\sigma T(0)^4=\sigma(T_t+\Gamma H_t)^4$ (le profil de température est affine de pente $-\Gamma$). La même relation donne $B(H_t)/U(H_t)=1-1/2=1/2$ donc $U(H_t)=2B(H_t)=2\sigma T_t^4$.

$$\frac{U(H_t)}{U(0)}=\frac{2T_t^4}{(T_t+\Gamma H_t)^4}=\frac{2}{\left(1+\frac{\Gamma H_t}{T_t}\right)^4}$$
$$\frac{U(H_t)}{U(0)}\simeq\frac{2}{1+4\frac{\Gamma H_t}{T_t}}$$
$$\ln\frac{U(H_t)}{U(0)}=\ln 2-\ln\left(1+4\frac{\Gamma H_t}{T_t}\right)\simeq\ln 2-\frac{4\Gamma H_t}{T_t}$$

Dans ces calculs, la variation de température ΓH_t, de l'ordre de quelques dizaines de kelvins, est supposée bien inférieure à T_t.

6. On identifie les expressions obtenues dans les deux questions précédentes.

$$-\frac{\tau_0H_a}{2H_t}=\ln 2-\frac{4\Gamma H_t}{T_t}$$
$$8\Gamma H_t^2-CT_tH_t-\tau_0H_aT_t=0$$

Cette équation du second degré possède deux racines dont une seule est positive ; elle est donnée par

$$H_t=\frac{CT_t+\sqrt{C^2T_t^2+32\Gamma\tau_0H_aT_t}}{16\Gamma} \quad .$$

7. La valeur de $T_t = 214\,\mathrm{K}$ obtenue dans la partie précédent est toujours valable puisqu'elle résulte de l'équilibre global de la Terre et de la relation $U(H_t) = 2B(T_t)$, toujours valable. On trouve $H_t = 10\,\mathrm{km}$, valeur cohérente avec celle que l'on observe dans les régions tempérées.

8. Si le concentration en GES augmente, l'atmosphère devient plus absorbante et τ_0 augmente. L'expression ci-dessus montre que cela entraîne une augmentation de H_t.

9. Dans ce modèle, la température au sol est $T(0) = T_t + \Gamma H_t = T_t + 65\,\mathrm{K} = 279\,\mathrm{K}$. Cette valeur n'est pas très éloignée de la valeur réelle de $288\,\mathrm{K}$. La hauteur d'émission H_e est telle que $T(H_e) = 254\,\mathrm{K}$, c'est à dire $T(0) - \Gamma H_e = 254\,\mathrm{K}$. On trouve $H_e = 3,9\,\mathrm{km}$. Comme la pente du profil de température est fixée, l'augmentation de H_t entraîne une élévation de la température au sol $T(0)$ et de la hauteur d'émission H_e.