

# DEVOIR N° 9

Le samedi 23 novembre, piste rouge

## Expérience de Jean Perrin

Centrale-Supélec

On appelle mouvement brownien l'agitation spontanée de particules de tailles micrométriques plongées dans un fluide sous l'action des fluctuations thermiques. Ce phénomène n'a été correctement décrit qu'à partir des travaux d'Einstein en 1905. Ce dernier montra tout d'abord qu'il existe une relation entre la diffusion des particules browniennes, la température et la viscosité du fluide dans lequel ces particules sont plongées. Quelques années plus tard, en 1908, Jean Perrin réalisera avec son élève Léon Brillouin (alors jeune normalien) une célèbre série d'expériences qui confirmera la validité de l'interprétation einsteinienne du mouvement brownien et confortera définitivement la réalité de l'hypothèse atomique.

Cette expérience consiste tout d'abord à préparer une solution de grains colloïdaux de rayon  $r = 0,52 \mu\text{m}$  dans un mélange eau-glycérol de viscosité  $\eta = 0,165 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ . On place alors cette solution colloïdale, pour laquelle le nombre de grains par unité de volume est initialement uniforme et vaut  $n_0 = 7,9 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}$ , entre deux lames de microscope séparées d'un millimètre (figure 1 gauche). Cette distance entre les deux lames est suffisante pour considérer que l'évolution de la densité de grains au voisinage des parois se fait dans un milieu semi-infini (figure 1 droite). Le tout est placé dans un thermostat de température  $\theta = 38,7^\circ \text{C}$ .

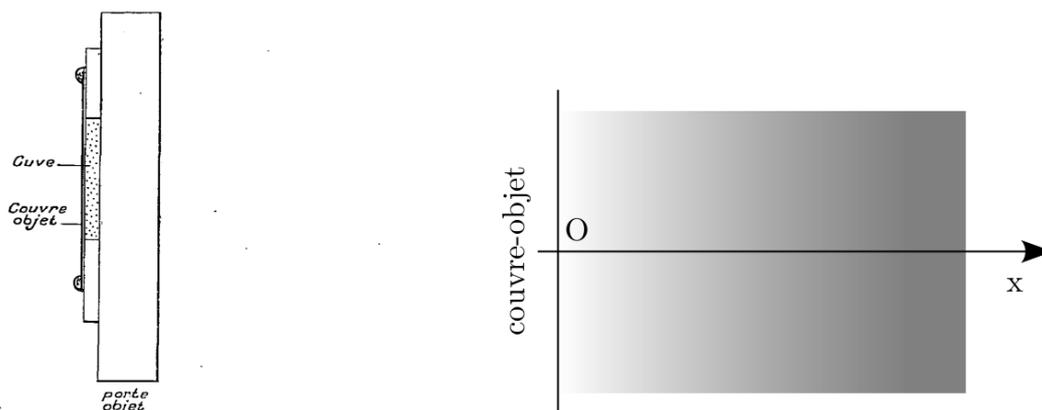


FIGURE 1 – Expérience de Jean Perrin. À gauche : schéma de la cuve contenant les grains colloïdaux plongés dans une solution d'eau glycinée, extrait de la publication de L. Brillouin. À droite : représentation du système de coordonnées ( $Ox$ ) permettant de repérer les grains par rapport à leur position en référence à la paroi couvre-objet située à l'origine.

Perrin remarqua que les particules qui viennent en contact avec les parois du récipient y restent collées, ce qui entraîne une déplétion en particules des régions proches des parois. Il comprit alors qu'on pouvait déterminer le coefficient de diffusion de ces particules en enregistrant au cours du temps, le nombre de particules par unité de surface qui se déposent sur le couvre-objet.

1. On note  $n(x, t)$  le nombre de grains colloïdaux par unité de volume et  $D$  leur coefficient de diffusion au sein milieu. Démontrer l'équation aux dérivées partielles à laquelle  $n(x, t)$  obéit.
2. Citer un autre phénomène dont l'évolution est régie par une équation de ce type. Pour les cinq-demis, vous pouvez gagner un point supplémentaire en citant encore un autre.

La résolution analytique de cette équation avec les conditions spécifiques de l'expérience (adhésion des grains sur la paroi couvre-objet) n'étant pas élémentaire, nous nous proposons de modéliser la situation par une analyse numérique basée sur un modèle probabiliste. Pour cela, on étudie la densité de grains dans une boîte de longueur telle que la paroi absorbante soit localisée en  $x = 0$  et l'autre extrémité en  $x = L$  suffisamment loin pour que la densité reste à sa valeur initiale  $n_0$  au cours de l'évolution temporelle considérée.

- On discrétise alors l'espace dans la direction ( $Ox$ ) en  $N_e$  intervalles de longueur  $a$  suffisamment petits pour que la densité de grains ne varie pas de façon significative sur cette distance; et de même, pour étudier

l'évolution temporelle de cette densité sur une durée  $T$ , on discrétise l'intervalle  $[0, T]$  en  $N_t$  intervalles de durée  $\tau$  telle que  $T = N_t\tau$ .

- Soit  $M(x, t) = an(x, t)$  la densité surfacique de particules dans une tranche d'épaisseur  $a$ . On introduit la variable sans dimension  $u(x, t) = M(x, t)/(n_0a)$  et on note  $u_{k,m} = u(x = ka, t = m\tau)$  la valeur de  $u$  entre les abscisses  $x_k = ka$  et  $x_{k+1} = (k+1)a$  évaluée à l'instant  $t_m = m\tau$ . La couche en  $k = 0$  correspondra ici à la paroi « adhésive » du couvre objet.
- Enfin, on notera  $p$  la probabilité qu'une particule dans la tranche numéro  $k$  passe dans une tranche voisine  $(k+1)$  pendant l'intervalle de temps  $\tau$  et de même la probabilité  $p$  identique pour qu'elle passe dans la tranche voisine  $(k-1)$  pendant ce même intervalle de temps.

3. Pour tout  $m$  et pour  $k \geq 2$ , justifier clairement qu'on a

$$u_{k,m+1} = u_{k,m} + p(u_{k+1,m} + u_{k-1,m} - 2u_{k,m}) \quad .$$

4. Par passage à la limite continue ( $\tau \rightarrow 0$ ,  $a \rightarrow 0$ ), montrer qu'on retrouve l'équation de la question 1 à condition de donner à  $D$  une valeur à exprimer en fonction de  $p$ ,  $a$  et  $\tau$ .

5. Pour  $k = 0$  et  $k = 1$ , la relation de récurrence de la question 3 ne s'applique plus en raison du comportement des particules sur la paroi, sur laquelle elles viennent se coller. Exprimer  $u_{0,m+1}$  et  $u_{1,m+1}$  en fonction des  $\{u_{i,m}\}$  en choisissant les valeurs de  $i$  adéquates.

Ces relations de récurrences permettent de calculer les valeurs de  $u_{k,m}$  à l'aide d'un code Python non demandé. Le résultat est représenté sur la figure (2) où les valeurs de  $u_{0,m}^2$  sont portées en fonction de  $m$  pour  $p = 0, 1$ .

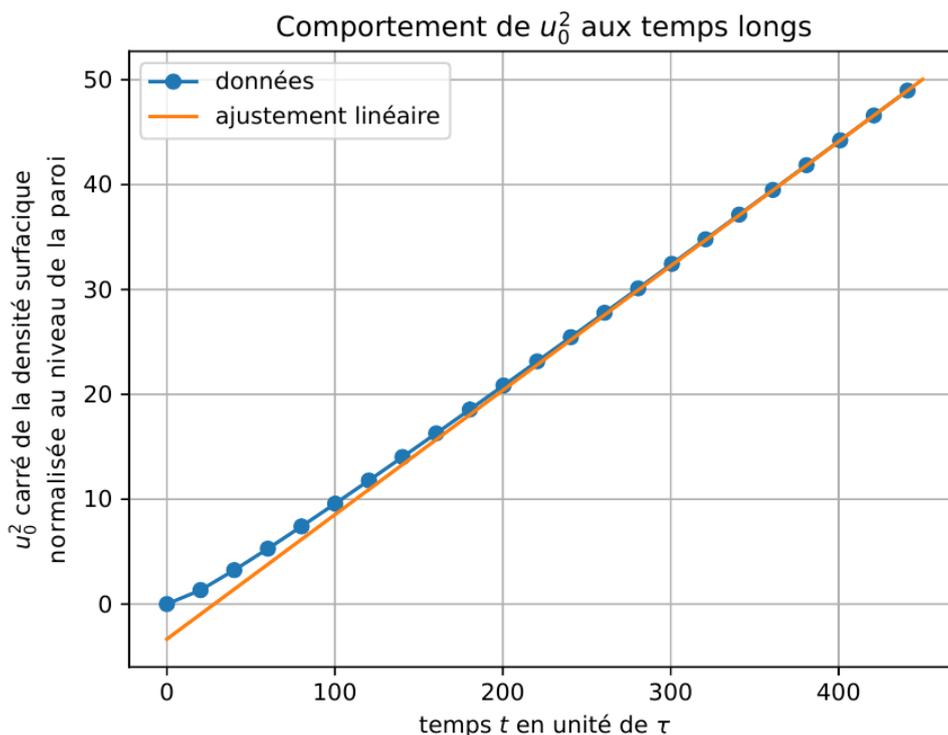


FIGURE 2 – Résultats de la simulation numérique de l'équation de diffusion en prenant  $a = 1$ ,  $\tau = 1$ ,  $p = 0, 1$ . Tracé du carré de  $u_{0,m}$  en fonction du temps (en unité de  $\tau$ ), dans le cas  $p = 0, 1$ .

6. On note  $M_0(t) = an_0u(0, t)$  la densité surfacique sur la paroi. Vérifier à l'aide de ce graphe que, passés les premiers instants, la densité surfacique  $M_0(t)$  suit la relation  $M_0^2(t) \approx \alpha Dn_0^2t$  où  $\alpha$  est un coefficient numérique voisin de 1 à déterminer à partir du graphe.

Les résultats expérimentaux obtenus par Léon Brillouin sont représentés sur la figure (3) dans laquelle le carré du nombre de grains  $N_p^2$  comptés sur une surface d'aire  $S = 2, 1.10^{-4} \text{ cm}^2$  est représenté en fonction de la durée de ses expériences exprimée en heures.

7. En utilisant les données numériques précisées plus haut dans la description de l'expérience et en vous appuyant sur le résultat de la question précédente, extraire de la figure (3) la valeur du coefficient de diffusion  $D$  des grains

colloïdaux dans cette solution. On indiquera la procédure mise en œuvre et on prendra soin d'exprimer ce résultat en unité du système international).

Une relation, due à Einstein, établit un lien très général entre le coefficient de diffusion des grains colloïdaux de rayon  $r$ ,  $D$ , et la viscosité du fluide  $\eta$  à la température  $T$  :

$$6\pi\eta r D = k_B T \quad .$$

8. En exploitant le résultat précédent et la relation d'Einstein, déduire une estimation de la constante de Boltzmann  $k_B$ , puis de la constante d'Avogadro. On indiquera précisément les différentes valeurs numériques et leurs unités utilisées dans ce calcul. On donne la constante des gaz parfait  $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ . Commenter le résultat.

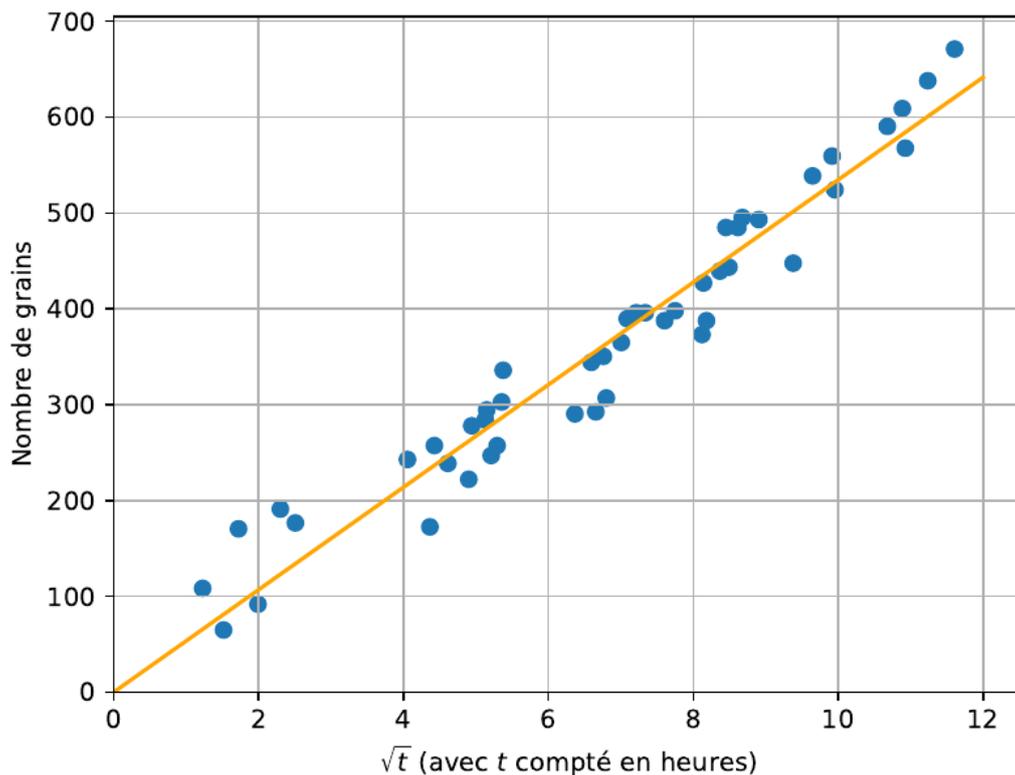


FIGURE 3 – Courbe représentant le carré du nombre de grains déposés sur une aire  $S = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2$  de la paroi couvre-objet en fonction du temps exprimé en heures.

## Récupération d'énergie thermique sous la chaussée

E3A

L'énergie solaire absorbée par le bitume peut être astucieusement utilisée pour assurer le chauffage d'habitations ou d'immeubles. Les sociétés néerlandaises OOMS (génie civil) et WTH (génie thermique) ont développé dans ce but le dispositif Road Energy System schématisé sur la figure 4 et constitué des organes suivants, dans lesquels circule de l'eau :

- un réseau de canalisations incluses dans la couche supérieure de la route ;
- un aquifère (réservoir d'eau souterrain naturel) « chaud » à la température  $T_c = 24^\circ\text{C}$  ;
- un échangeur thermique de type eau/eau (entre le dispositif et le système de chauffage de l'immeuble) ;
- une pompe assurant la circulation de l'eau.

Selon la saison, deux circuits différents de circulation d'eau sont utilisés afin de stocker l'énergie dans l'aquifère (en été) puis de l'y récupérer (en hivers).

Nous laissons ici de côté le problème du dimensionnement des aquifères pour nous concentrer sur le bilan thermique de la chaussée durant l'été. La couche de bitume est assimilée à une plaque noire de surface  $S$  et de température uniforme  $T_R$  au contact de l'atmosphère de température  $T_A = 300 \text{ K}$ . Sur sa face supérieure, cette couche :

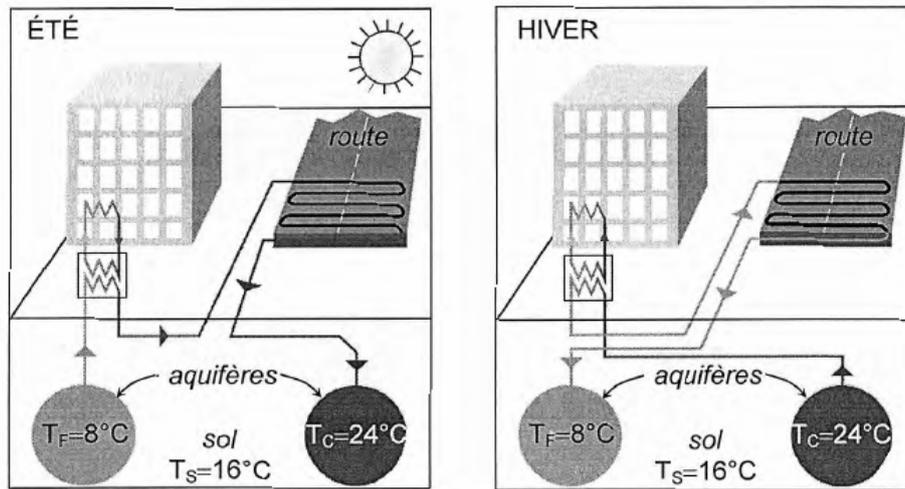


FIGURE 4

- reçoit un rayonnement solaire de puissance surfacique moyenne  $\varphi_s = 400 \text{ W.m}^{-2}$  ;
- reçoit un rayonnement thermique de puissance surfacique  $\varphi_a^R$  de la part de l'atmosphère ;
- émet un rayonnement thermique de puissance  $\varphi_b^R$  vers l'atmosphère ;
- perd une puissance surfacique  $\varphi_{cc} = h(T_R - T_A)$  par conducto-convection ( $h = 10 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ).

Sur sa face inférieure, la couche de bitume est en contact avec la terre dont la température est constante à partir d'une profondeur  $p = 10 \text{ m}$ , valant  $T_S = 290 \text{ K}$ . Ce contact est modélisé par une résistance thermique de longueur  $p$ , de surface  $S$  et de conductivité thermique  $\lambda = 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  ; celle-ci est traversée par le flux thermique de conduction  $\Phi_c = S\varphi_c$ .

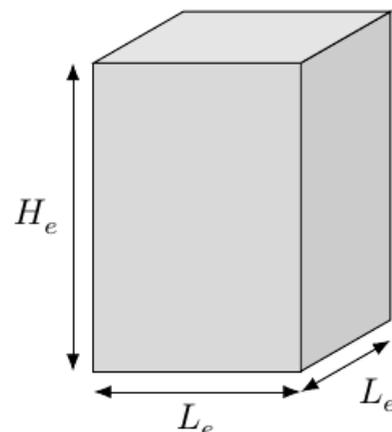
1. Faire un schéma de la couche de bitume, de la terre et de l'atmosphère en y faisant figurer les différentes températures ainsi que les divers flux thermiques surfaciques.
2. Rappeler la loi de Stefan relative à un corps noir (la constante de Stefan-Boltzmann est  $\sigma = 5,67.10^{-8} \text{ SI}$ ).
3. Exprimer la résistance thermique  $R_{th}$  d'un barreau cylindrique rectiligne unidimensionnel de section  $S$ , de longueur  $L$  et de conductivité  $\lambda$ . En déduire l'expression de  $\varphi_c$  en fonction de  $\lambda$ ,  $p$ ,  $T_R$  et  $T_S$ .
4. Traduire de manière littérale l'équilibre thermique de la route en régime permanent à l'aide d'une première relation entre les divers flux surfaciques, puis par une seconde entre les températures et les constantes caractéristiques des échanges thermiques.
5. Montrer que si  $T_R \approx T_A$ , alors  $\varphi_b^R - \varphi_a^R \approx BT_A^\alpha(T_R - T_A)$  où  $B$  et  $\alpha$  sont deux constantes à expliciter.
6. En déduire l'expression de  $T_R$  en fonction de  $\varphi_s$ ,  $\sigma$ ,  $h$ ,  $\lambda$ ,  $p$ ,  $T_A$  et  $T_S$ .
7. Comparer numériquement les termes au numérateur de l'expression précédente. Faire de même pour ceux du dénominateur et en déduire une expression simplifiée de  $T_R$ . Quel phénomène physique se trouve ainsi négligé ?
8. Calculer la valeur numérique de  $T_R$  (en kelvin) et commenter.  
L'énergie thermique prélevée par l'eau circulant dans les canalisations incluses dans la chaussée peut être modélisée par un flux surfacique  $\varphi_E$  extrait de la couche de bitume.
9. Comment le bilan thermique est-il modifié pour tenir compte de  $\varphi_E$  ? En déduire numériquement la puissance surfacique maximale  $\varphi_E$  qui peut être extraite de la route lorsque  $T_R = T_C$ .  
Le coefficient de diffusion thermique de la couche de bitume vaut  $D = 2.10^{-6} \text{ SI}$  et les tuyaux sont enterrés à la profondeur  $e = 10 \text{ cm}$ .
10. Calculer la durée caractéristique de diffusion thermique pertinente dans le bitume. L'hypothèse selon laquelle  $T_R$  est uniforme est-elle valable ?

# Conduction thermique dans un réservoir d'énergie

Centrale-Supélec

Les questions qui suivent sont extraites d'un problème portant sur un système de stockage de d'énergie. Il est constitué de machines permettant d'injecter ou de stocker cette énergie, sous forme thermique, dans des enceintes jouant le rôle de réservoir et qui se réchauffent ou se refroidissent selon que l'on procède à un stockage ou à un déstockage. Nous n'étudions pas ici le fonctionnement de l'installation dans son ensemble, mais seulement les propriétés de conduction thermique des enceintes.

**34.** On considère pour cette question une enceinte ayant la forme d'un parallélépipède rectangle de base carrée, de largeur  $L_e = 10$  m et de hauteur  $H_e$ . Elle contient un matériau réfractaire de conductivité  $\lambda = 0,03 \text{ W.K}^{-1}.\text{m}^{-1}$ . Après une phase de stockage, son énergie interne est  $U = 1,7.10^{12} \text{ J}$ . Ses parois verticales sont parfaitement calorifugées, mais pas ses parois horizontales. Lorsque la machine est à l'arrêt, on observe des fuites d'énergie associées une diffusion thermique axiale (selon la verticale  $(Oz)$ ). On mesure un gradient de température uniforme  $dT/dz = 200 \text{ K.m}^{-1}$ . Évaluer l'énergie perdue pendant une durée  $\Delta t = 24 \text{ h}$  et la comparer à l'énergie thermique initialement stockée dans l'enceinte.



**35.** L'étude précédente nécessite une connaissance de la conductivité thermique  $\lambda$  du milieu contenu dans l'enceinte. Il s'agit d'un matériau granulaire, c'est à dire constitué de particules solides entre lesquelles se trouve un gaz. La conductivité thermique d'un tel système, dite conductivité thermique effective, intègre logiquement dans sa définition, les paramètres primaires que sont les conductivités thermiques intrinsèques des particules solides  $\lambda_s$  et du gaz  $\lambda_g$ , avec  $\lambda_s > \lambda_g$ , ainsi que la porosité  $\epsilon$  du mélange, défini comme le rapport du volume occupé par le gaz au volume total.

La conductivité thermique effective d'un milieu granulaire est comprise entre deux valeurs extrêmes  $\lambda_{min}$  et  $\lambda_{max}$ . Une situation limite correspond à un milieu où le vecteur densité de flux de chaleur est perpendiculaire aux strates (modèle série, figure 5). L'autre situation limite correspond à une disposition des strates parallèles à la direction du flux de chaleur (modèle parallèle, figure 5).

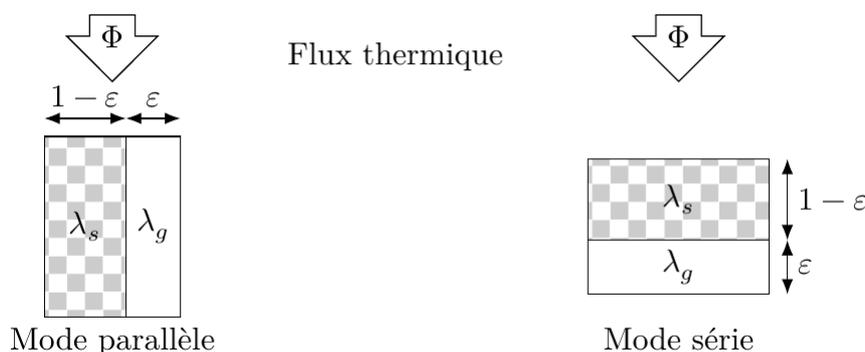


FIGURE 5 – Situations limites pour un milieu poreux. Dans le modèle parallèle, les deux phases se partagent la section traversée  $S$  selon des proportions  $(1 - \epsilon)$  et  $\epsilon$  et occupent toute la hauteur  $H$ . Dans le modèle série, les deux phases se partagent la hauteur  $H$  selon des proportions  $(1 - \epsilon)$  et  $\epsilon$  et occupent toute la section  $S$ . Normalement, les deux dessins devraient avoir la même taille !

- Si tout l'espace de section  $S$  et de hauteur  $H$  était rempli d'un matériau de conductivité  $\lambda$  uniforme, quel serait l'écart de température  $(T_1 - T_2)$  entre la face supérieure et la face inférieure lorsque le flux  $\Phi$  le traverse ?
- Pour chaque modèle, on définit la conductivité effective comme celle du matériau qui, s'il emplissait tout le volume et s'il était traversé par le même flux  $\Phi$ , produirait entre ses extrémités supérieure et inférieure la même différence de température. Exprimer en fonction de  $\lambda_s$ ,  $\lambda_g$  et  $\epsilon$  la conductivité thermique effective  $\lambda_{\parallel}$  dans le modèle parallèle.
- Exprimer en fonction des mêmes variables la conductivité thermique effective  $\lambda_{série}$  dans le modèle série.

d) Valider les expressions de  $\lambda_{\parallel}$  et  $\lambda_{\text{serie}}$  en considérant des cas particuliers.

**36.** Montrer que l'une des deux expressions est toujours supérieure à l'autre puis donner  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$ .

**37.** On donne  $\lambda_g = 0,018 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  (gaz argon),  $\lambda_s = 0,4 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  et  $\epsilon = 0,47$ . Calculer numériquement  $\lambda_{\min}$  et  $\lambda_{\max}$ .

### Mesure de la conductivité thermique effective du milieu granulaire

On place un fil métallique cylindrique de rayon  $r_0$  au centre d'un bloc du matériau à étudier (sable et argon) de façon à ce qu'il le traverse verticalement. Le fil est relié à une alimentation électrique qui lui fournit un échelon de courant. On relève au cours du temps la variation de la résistance électrique du fil, ce qui permet de déterminer sa température.

On modélise ce dispositif par un fil de longueur infinie plongé dans un espace totalement rempli du matériau à étudier. L'ensemble est initialement à la température uniforme  $T_0$ . À partir du temps  $t = 0$ , on applique l'échelon de courant et le fil produit un flux thermique constant par unité de longueur  $\varphi_L$ . On suppose que les transferts thermiques s'effectuent seulement par conduction. Le matériau est incompressible, de masse volumique constante  $\rho$ , de conductivité thermique  $\lambda$  et de capacité thermique massique  $c_p$ . On admet que la répartition de température dans le matériau présente une symétrie cylindrique autour du fil. On se place donc en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$  en prenant le fil comme axe, autrement dit  $r = 0$  correspond au centre du fil.

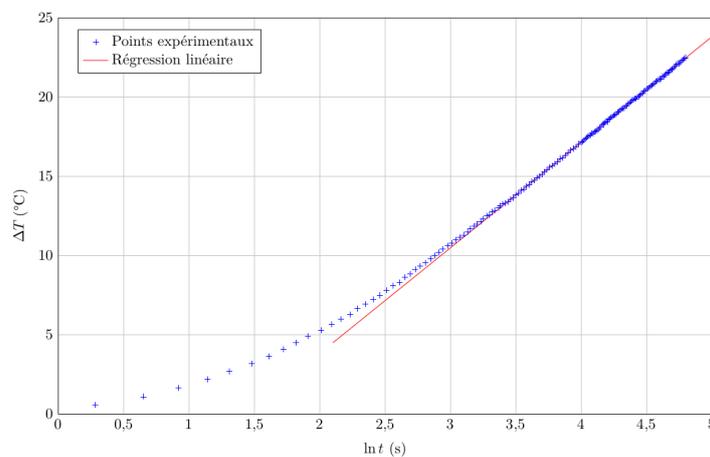


FIGURE 6 – Résultats de mesures de températures

**38.** Écrire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la température  $T(r, t)$ . On pourra introduire la diffusivité thermique  $\alpha = \lambda/(\rho c_p)$ . On donne l'expression de l'opérateur laplacien en coordonnées cylindriques :  $\Delta f(r, \theta, z) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ .

**39.** À un instant  $t$  donné, quelle est, en ordre de grandeur, la longueur caractéristique de variation de la température avec  $r$  ?

**40.** La résolution de l'équation précédente nécessite d'exprimer la condition limite à la surface du fil chaud en  $r = r_0$ . Exprimer  $\frac{\partial T}{\partial r}(r_0, t)$  en fonction de  $\lambda$ ,  $r_0$  et  $\varphi_L$ .

Compte tenu de cette condition limite et si on néglige le rayon du fil devant la longueur caractéristique de variation de la température, la solution de l'équation de la question 38 s'écrit

$$T(r, t) = T_0 + \frac{\varphi_L}{4\pi\lambda} E\left(\frac{r^2}{4Dt}\right) \quad \text{avec} \quad E(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad .$$

Pour les valeurs de  $x$  petites devant 1, on peut utiliser l'approximation  $E(x) \simeq -\gamma - \ln(x)$  où  $\gamma$  est une constante.

**41.** Donner une expression de  $T(r_0, t)$  aux temps longs en précisant l'échelle de temps pertinente.

**42.** La figure 6 donne le relevé expérimental de  $\Delta T = T(r_0, t) - T_0$  en fonction du temps. Montrer que ces mesures sont en accord avec les résultats théoriques précédents.

**43.** Estimer la conductivité thermique effective sachant que le fil étudié a une longueur  $\ell = 20 \text{ cm}$  et qu'il émet un flux total  $\Phi = 0,64 \text{ W}$ .

**44.** Commenter ce résultat.

# Plateforme stabilisatrice

Centrale-Supélec

*Les parties III et IV peuvent être abordées indépendamment de la partie II.*

Depuis la fin des années 1960, la société néerlandaise Datawell développe des bouées houlographes commercialisées sous le nom de Waverider. Flottant à la surface de la mer, une telle bouée se déplace au gré des vagues de sorte qu'en enregistrant son mouvement, on accède aux caractéristiques de la houle.



FIGURE 7 – Photographies de bouées houlographes Waverider

Pour détecter ses propres mouvements, un Waverider est muni d'un accéléromètre uniaxe mesurant la projection de l'accélération  $\vec{a}_W$  de la bouée sur une direction particulière  $\vec{u}_z$ . Cette direction est liée à l'accéléromètre : si celui-ci se réoriente dans l'espace, le vecteur  $\vec{u}_z$  se modifie généralement et l'accéléromètre mesure la projection de  $\vec{a}_W$  sur une nouvelle direction. Cependant, afin d'accéder à la hauteur des vagues, ce sont les accélérations *verticales* qu'il convient de mesurer et il est donc impératif que la direction sensible de l'accéléromètre, définie par le vecteur  $\vec{u}_z$ , demeure en permanence colinéaire à l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$ . Il s'agit d'une véritable gageure car l'accéléromètre est embarqué dans une bouée sujette à des mouvements complexes provoqués par les vagues. Pour maintenir fixe l'orientation de l'accéléromètre malgré ces mouvements perturbateurs, celui-ci n'est pas rigidement fixé à la bouée, mais au contraire placé sur une plateforme stabilisatrice pendulaire. Ce dispositif protégé par des brevets est au cœur de la technologie Waverider. En voici une photographie et une description sommaire (figure 8).

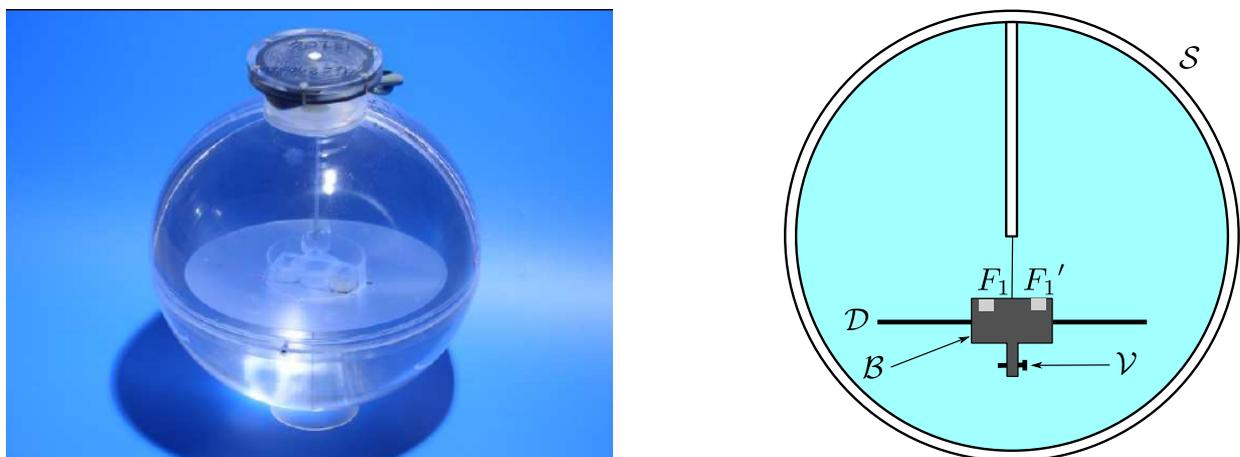


FIGURE 8 – Plateforme stabilisatrice

La plateforme stabilisatrice est enfermée dans une sphère transparente  $\mathcal{S}$  (figure 8), elle-même placée dans la bouée. Attention à ne pas confondre la sphère  $\mathcal{S}$  et la coque de la bouée qui est, elle aussi, grossièrement sphérique. L'accéléromètre (non représenté) est solidaire d'un bloc en plastique  $\mathcal{B}$  prolongé vers le bas par une tige du même matériau, elle-même traversée par une vis en métal  $\mathcal{V}$  que l'on peut enfoncer plus ou moins pour la déplacer de

droite à gauche. Dans sa partie supérieure, le bloc a été évidé sur deux régions  $F_1$  et  $F'_1$ , puis les cavités comblées avec un matériau moins dense. L'ensemble est fixé sur un disque  $\mathcal{D}$  constituant la plateforme proprement dite, puis suspendu par un fil très fin au centre  $O$  d'une sphère  $\mathcal{S}$ , lui-même lié rigidement à la paroi sphérique par une tige. La sphère est enfin remplie d'un liquide judicieusement choisi.

## I Flottabilité

Le principe d'Archimède peut s'exprimer ainsi : *Soit un fluide en équilibre hydrostatique dans le champ de pesanteur par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T$ . Un corps immergé dans ce fluide subit de sa part des forces de pression dont la somme est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé.*

**Q 1.** On considère un solide homogène de masse volumique  $\rho$  et de volume  $V$  entièrement immergé dans un liquide de masse volumique  $\rho_\ell$  en équilibre dans le champ de pesanteur. Par une analyse des forces qu'il subit, discuter la propension de ce solide à remonter vers la surface pour y flotter ou, au contraire, à couler vers le fond.

**Q 2.** Toujours soumis au champ de pesanteur, le liquide est désormais en équilibre dans un référentiel  $\mathcal{R}$  en translation rectiligne uniforme, subissant une accélération  $\vec{a}_e$  par rapport à  $\mathcal{R}_T$ . Comment faut-il modifier le principe d'Archimède ?

## II Horizontalité statique de la plateforme

Les éléments  $F_1$ ,  $F'_1$  et  $\mathcal{V}$  ont pour rôle d'assurer l'horizontalité de la plateforme. Pour comprendre le principe du dispositif, on considère un système modèle  $\Sigma$  constitué de trois parties comme le montre la figure 9 :

- un solide homogène  $S_0$  de volume  $V_0$ , de centre de masse  $G_0$ , formé d'un matériau de masse volumique  $\rho_0$ , modélisant le bloc en plastique et le disque  $\mathcal{D}$  ;
- un solide homogène  $S_1$  de volume  $V_1$ , de centre de masse  $G_1$  et de masse volumique  $\rho_1 < \rho_0$ , modélisant  $F_1$  et  $F'_1$  ;
- un solide homogène  $S_2$  de volume  $V_2$ , de centre de masse  $G_2$  et de masse volumique  $\rho_2 > \rho_0$ , modélisant la vis  $\mathcal{V}$  et les parties métalliques de l'accéléromètre.

L'ensemble est suspendu par un fil fixé en  $C$  et immergé dans le liquide, choisi de telle manière que sa masse volumique  $\rho_\ell$  soit proche de  $\rho_0$ . Dans cette sous-partie seulement, nous prendrons  $\rho_\ell = \rho_0$  pour simplifier, bien qu'un léger écart existe entre ces deux valeurs. On se limite à une description bidimensionnelle dans le plan de la figure (9) et on envisage une possible inclinaison du système  $\Sigma$  par rotation autour de l'axe  $(C, \vec{u}_y)$ , le fil restant toujours vertical (il ne touche le solide  $S_0$  qu'en  $C$ ).

On note  $\vec{\Pi}_0$  (respectivement  $\vec{\Pi}_1$  et  $\vec{\Pi}_2$ ) la poussée d'Archimède appliquée en  $G_0$  (respectivement  $G_1$  et  $G_2$ ) que subirait le solide immergé  $S_0$  (respectivement  $S_1$  et  $S_2$ ) en l'absence des deux autres solides (le liquide l'entourant donc totalement). On admet que la poussée d'Archimède due au liquide sur le système  $\Sigma$  peut être remplacée par les trois forces  $\vec{\Pi}_1$ ,  $\vec{\Pi}_2$  et  $\vec{\Pi}_3$ .

**Q 3.** Exprimer la résultante  $\vec{R}$  et le moment  $\vec{\Gamma}_C$  en  $C$  des forces de pression et de pesanteur que  $\Sigma$  subit en fonction des grandeurs judicieuses parmi  $\rho_\ell$ ,  $\rho_0$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $V_0$ ,  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $C\vec{G}_0$ ,  $C\vec{G}_1$ ,  $C\vec{G}_2$  et  $\vec{g}$ .

**Q 4.** Les sous-systèmes  $S_1$  et  $S_2$  procurent respectivement à  $\Sigma$  une propension à flotter ou à couler. À quelle condition ces effets antagonistes se compensent-ils ? Exprimer la réponse sous la forme d'une relation entre  $\rho_\ell$ ,  $\rho_1$ ,  $\rho_2$ ,  $V_1$  et  $V_2$ .

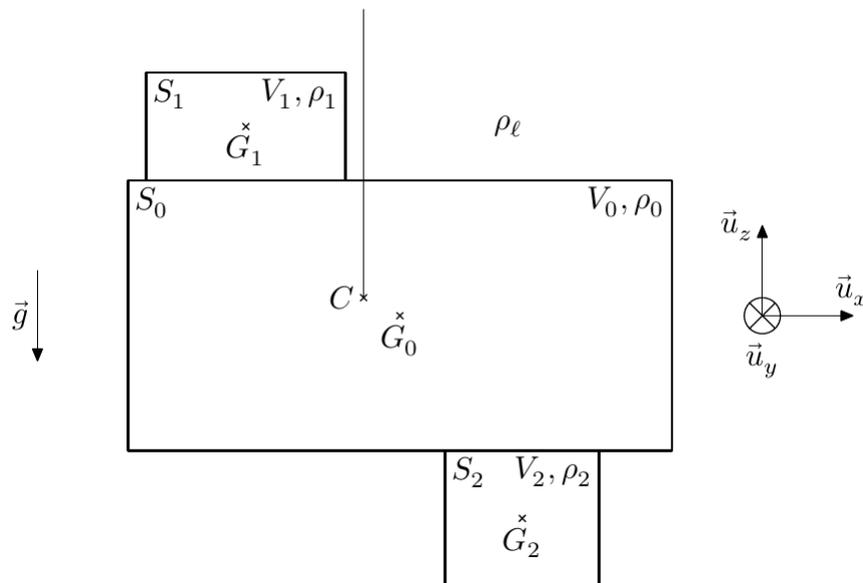
**Q 5.** La relation précédente est supposée satisfaite. Montrer que le moment en  $C$  des forces s'exerçant sur l'ensemble  $\Sigma$  s'exprime sous la forme

$$\vec{\Gamma}_C = M_m \overrightarrow{G_1 G_2} \wedge \vec{g} \quad (1)$$

et donner l'expression de  $M_m$  en fonction de  $\rho_\ell$ ,  $\rho_2$  et  $V_2$ .

**Q 6.** Dédurre de la relation précédente la direction prise par le vecteur  $\overrightarrow{G_1 G_2}$  à l'équilibre de  $\Sigma$ . Selon l'orientation de ce vecteur, discuter la stabilité de l'équilibre de l'équilibre à l'aide d'un ou de plusieurs dessins pertinents.

**Q 7.** En revenant au système réel de la figure (9), expliquer le rôle de la vis  $\mathcal{V}$ .

FIGURE 9 – Modélisation de la plateforme par un système  $\Sigma$  en trois parties

### III Oscillations du pendule et longueur effective

Dans cette sous-partie, on suppose la sphère  $\mathcal{S}$  et le point  $O$  fixes dans  $\mathcal{R}_T$  et on étudie un mouvement pendulaire de la plateforme  $\mathcal{D}$  dans le cadre d'un modèle simplifié :

- La plateforme et ses accessoires sont remplacés par un solide  $\Sigma_0$  quasi-ponctuel de volume  $V_0$  et de masse volumique  $\rho_0$  immergé dans le liquide de masse volumique  $\rho_\ell$ , suspendu en  $O$  par un fil souple de longueur  $\ell$  et de direction indiquée par un angle  $\theta$  (figure (10)).
- On utilise encore le principe d'Archimède pour exprimer la résultante des forces du liquide sur le solide  $\Sigma_0$ , malgré les mouvements de ceux-ci (on néglige donc notamment dans cette sous-partie toute force de frottement due au liquide sur le solide).
- On augmente l'inertie du solide  $\Sigma_0$  pour tenir compte du fait qu'il entraîne dans son déplacement du liquide qui se trouve autour de lui : pour ce faire, on affecte à  $\Sigma_0$  une masse effective  $m_{\text{eff}}$  *uniquement pour le calcul de ses éléments cinétiques (quantité de mouvement, moment cinétique, énergie cinétique)*. Cette masse effective est supposée constante et est bien supérieure à la masse réelle de la plateforme et de ses accessoires.

Attention : la *masse effective* n'intervient pas dans l'expression du poids de  $\Sigma_0$  qui ne dépend que de sa masse réelle  $\rho_0 V_0$ .

**Q 8.** Établir l'équation différentielle vérifiée par  $\theta(t)$  dans l'approximation des petits angles. Identifier une pulsation propre  $\omega_0$  de la forme

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell_{\text{eff}}}}$$

et donner l'expression de  $\ell_{\text{eff}}$  en fonction de  $\ell$ ,  $m_{\text{eff}}$  et de la masse apparente  $m_{\text{app}} = (\rho_0 - \rho_\ell)V_0$ .

**Q 9.** L'auteur du brevet original estime que le volume de fluide entraîné par le pendule est égal à  $20V_0$  de sorte que  $m_{\text{eff}} = \rho_0 V_0 + 20\rho_\ell V_0$ . La masse volumique du liquide est de 1% inférieure à  $\rho_0$ . Sous ces hypothèses, comparer la période propre  $T_0$  du pendule à celle  $T_{0\text{vide}}$  que l'on observerait en l'absence de liquide.

**Q 10.** Dans les brochures commerciales Datawell, on peut lire la phrase suivante : *La période propre d'oscillations de la plateforme est de l'ordre de 40 secondes, ce qui correspondrait à un pendule de 400 mètres.* Cette affirmation vous paraît-elle cohérente ? Peut-on estimer la longueur réelle  $\ell$  ?

### IV Effet stabilisateur

On rappelle que la sphère de la figure (8) est embarquée dans une bouée. Sous l'effet de la houle, son centre  $O$  subit, en plus des accélérations verticales à mesurer, des accélérations horizontales perturbatrices.

Comme dans la partie précédente, on représente la plateforme par un pendule simple et on étudie ses oscillations, repérées par l'angle  $\theta$ . On envisage une situation dans laquelle le point de fixation  $O$  subit, par rapport

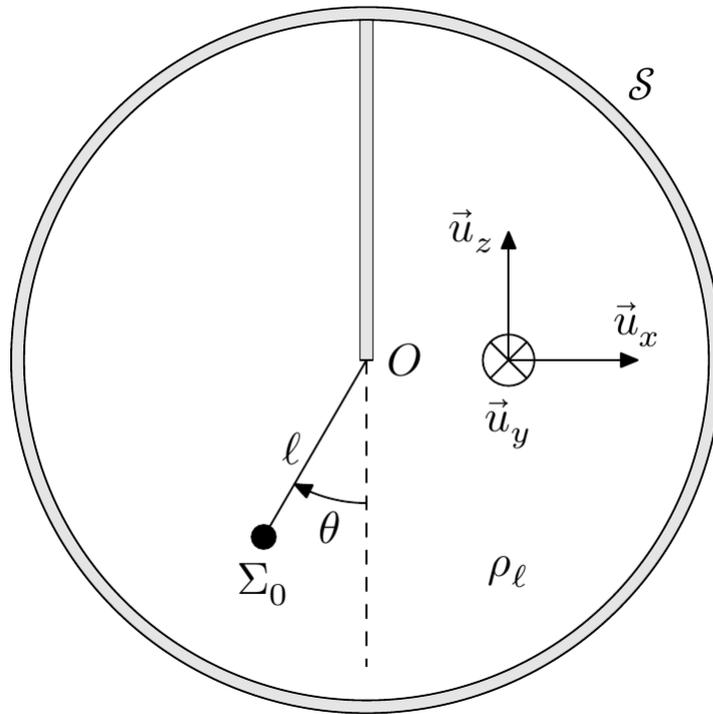


FIGURE 10 – Modélisation de la plateforme en pendule simple (d’après l’orientation du vecteur  $\vec{u}_y$  l’angle  $\theta$  représenté sur cette figure est positif)

au référentiel terrestre  $\mathcal{R}_T$  supposé galiléen, une accélération  $\vec{a} = a(t)\vec{u}_x$ . On raisonne dans le référentiel  $\mathcal{R}_S$  d’origine  $O$  et dont les axes sont parallèles à ceux de  $\mathcal{R}_T$ . La poussée d’Archimède et l’effet de masse effective interviennent comme dans la sous-partie précédente et on prend de surcroît en compte une force de frottement visqueux  $\vec{F}_v = -\beta\vec{v}$  sur le solide  $\Sigma_0$  de vitesse  $\vec{v}$ .

**Q 11.** En tenant compte de la question 2, donner l’expression de la poussée d’Archimède. Quelle autre force s’exerçant sur le pendule faut-il considérer pour rendre compte du mouvement accéléré de  $\mathcal{R}_S$  par rapport à  $\mathcal{R}_T$ ? Dans l’expression de cette force, on fera intervenir la masse *réelle*  $\rho_0 V_0$  de  $\Sigma_0$  et non pas sa masse *effective*.

**Q 12.** Dans l’approximation des petits angles, démontrer que l’équation du mouvement du pendule est dorénavant de la forme

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = -\frac{a(t)}{\ell_{\text{eff}}} \quad (2)$$

et donner l’expression du facteur de qualité  $Q$  en fonction de  $m_{\text{eff}}$ ,  $\beta$  et  $\omega_0$ .

**Q 13.** On procède à une étude de la réponse harmonique du pendule. L’accélération  $a(t)$  est de la forme  $a(t) = \Re(a_0 e^{j\omega t})$  et on pose  $\theta = \Re(\underline{\theta}_m e^{j\omega t})$ .

**Q 14.** Exprimer  $\underline{\theta}_m$  en fonction de  $a_0$ ,  $\ell_{\text{eff}}$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$  et  $Q$ .

On note  $\theta_0$  la valeur de  $\underline{\theta}_m$  obtenue pour  $\omega = 0$  puis on pose  $\underline{H}(j\omega) = \underline{\theta}_m/\theta_0$ .

**Q 15.** Donner l’expression de  $\underline{H}$ . À quel type de filtre une telle fonction de transfert est-elle associée?

**Q 16.** Quelle expression  $\underline{H}_1$  (en fonction de  $\omega$ ,  $g$  et  $\ell$ ) la fonction de transfert prendrait-elle si le pendule oscillait dans l’air, le liquide étant absent? On néglige dans ce cas les effets de viscosité et tout autre phénomène dissipatif.

Le Waverider est conçu pour détecter une houle de fréquence comprise entre 0,03 et 1 herz. La figure 11 représente la partie gain des diagrammes de Bode correspondant aux fonctions de transfert  $\underline{H}$  et  $\underline{H}_1$ .

**Q 17.** Commenter ces courbes. Quelle inclinaison maximale (en degrés) atteint-on si  $a_0 = 1 \text{ m.s}^{-2}$ ?

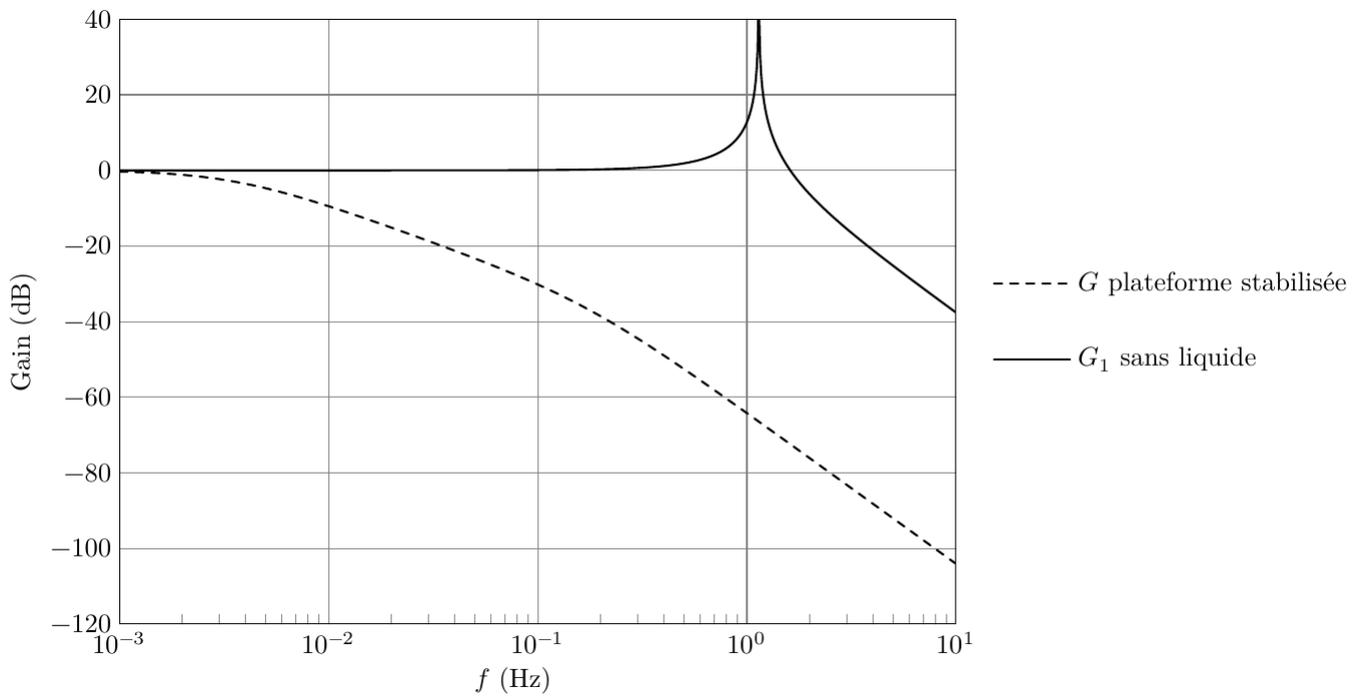


FIGURE 11 – Diagrammes de Bode