Problème I — Réduction d'un couple de matrices (piste bleue)

Dans ce problème, on fixe un entier n strictement positif. La lettre $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Pour tout couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit les notions suivantes.

- Pour tout scalaire λ dans $\mathbb{K}$, l'ensemble $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ est l'ensemble des matrices-colonnes X vérifiant l'égalité $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{BX}$.
- Les valeurs propres du couple (A, B) sont les scalaires λ de $\mathbb{K}$ pour lesquels l'ensemble $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ n'est pas réduit à la colonne nulle. En d'autres termes, ce sont les scalaires λ pour lesquels la matrice $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{B}$ n'est pas inversible.
- On note $\chi_{(\mathrm{A},\mathrm{B})}$ la fonction $\lambda \mapsto \mathrm{dét}(\mathrm{A} - \lambda\mathrm{B})$ définie sur $\mathbb{K}$.
- On note $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ l'ensemble des valeurs propres du couple (A, B), c'est-à-dire l'ensemble des zéros de la fonction $\chi_{(\mathrm{A},\mathrm{B})}$.

Dans le cas $\mathrm{B} = \mathrm{I}_n$, on reconnaît les notions usuelles de valeur propre, d'espace propre et de polynôme caractéristique de la matrice A. On notera usuellement $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ et χ_A les objets $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}, \mathrm{I}_n)$ et $\chi_{(\mathrm{A},\mathrm{I}_n)}$.

Partie I

Définissons encore quelques notions.

Soit (A, B) un couple de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Dire que le couple (A, B) est *régulier* signifie que la fonction $\chi_{(\mathrm{A},\mathrm{B})}$ n'est pas identiquement nulle.
- Étant donné un deuxième couple $(\mathrm{A}', \mathrm{B}')$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, dire que le couple (A, B) est *équivalent* au couple $(\mathrm{A}', \mathrm{B}')$ signifie qu'il existe deux matrices P et Q dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant les égalités
$$\mathrm{A} = \mathrm{PA}'\mathrm{Q} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{B} = \mathrm{PB}'\mathrm{Q}.$$
Cette propriété est notée $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \sim (\mathrm{A}', \mathrm{B}')$.
- Dire que le couple (A, B) est *diagonalisable* signifie qu'il existe deux matrices diagonales D et D′ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que le couple (A, B) soit équivalent au couple $(\mathrm{D}, \mathrm{D}')$.

I.1. Soit (A, B) un couple de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I.1.a. On suppose dans cette question que la matrice B est inversible.
Pour tout λ dans $\mathbb{K}$, exprimer $\chi_{(\mathrm{A},\mathrm{B})}(\lambda)$ en fonction de $\chi_{\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}}(\lambda)$ et en déduire que la fonction $\chi_{(\mathrm{A},\mathrm{B})}$ est polynomiale. Préciser son degré.

I.1.b. On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 2. Donner un exemple de couple (A, B) de matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour lequel la fonction $\chi_{(\mathrm{A},\mathrm{B})}$ est identiquement nulle.

I.1.c. Montrer, dans le cas général, que la fonction $\chi_{(\mathrm{A},\mathrm{B})}$ est polynomiale, de degré majoré par n.

I.2. On considère deux couples (A, B) et $(\mathrm{A}', \mathrm{B}')$ de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

I.2.a. Montrer l'équivalence logique
$$(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \sim (\mathrm{A}', \mathrm{B}') \iff \exists (\mathrm{P}, \mathrm{Q}) \in (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}))^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \qquad \mathrm{A} - \lambda\mathrm{B} = \mathrm{P}(\mathrm{A}' - \lambda\mathrm{B}')\mathrm{Q}.$$

I.2.b. On suppose que (A, B) est équivalent à $(\mathrm{A}', \mathrm{B}')$. Montrer qu'il existe une constante α non nulle vérifiant l'égalité
$$\chi_{(\mathrm{A},\mathrm{B})} = \alpha\chi_{(\mathrm{A}',\mathrm{B}')}.$$
En déduire l'égalité $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{A}', \mathrm{B}')$.

I.3. Dans cette question, on suppose que le couple (A, B) est régulier.

I.3.a. Pour tout λ dans $\mathbb{K} \setminus \{0\}$, montrer l'égalité
$$\chi_{(\mathrm{A},\mathrm{B})}(\lambda) = (-\lambda)^n \chi_{(\mathrm{B},\mathrm{A})}(1/\lambda).$$

I.3.b. Montrer que le couple (B, A) est régulier.

I.3.c. Dans cette question, on suppose qu'il existe deux entiers r et s vérifiant les inégalités $1 \leqslant r \leqslant s \leqslant n$, ainsi que des scalaires $a_r, \ldots, a_s$ dans $\mathbb{K}$, avec a_r et a_s non nuls, tels que la fonction polynomiale $\chi_{(\mathrm{B},\mathrm{A})}$ s'écrive sous la forme

$$\chi_{(\mathrm{B},\mathrm{A})}(\lambda) = \sum_{k=r}^{s} a_k \lambda^k.$$

Montrer que 0 est alors une racine de $\chi_{(\mathrm{B},\mathrm{A})}$ d'ordre de multiplicité r et que le polynôme $\chi_{(\mathrm{A},\mathrm{B})}$ est de degré $n-r$.

I.3.d. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes

i) la matrice B est inversible ;

ii) le polynôme $\chi_{(\mathrm{A},\mathrm{B})}$ est de degré n ;

iii) $0 \notin \mathrm{Sp}(\mathrm{B}, \mathrm{A})$.

I.4. Dans cette question, on suppose que la matrice B est inversible. Montrer que si la matrice $\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}$ est diagonalisable, alors le couple (A, B) est diagonalisable.

Partie II

Voici quelques nouvelles définitions, qui s'appliquent à un couple (A, B) régulier de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- Pour tout λ dans $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$, on note $m_\lambda(\mathrm{A}, \mathrm{B})$ l'ordre de multiplicité de λ en tant que racine du polynôme du polynôme $\chi_{(\mathrm{A},\mathrm{B})}$.
- Si la matrice B n'est pas inversible, on note

$$\mathrm{Sp}_\infty(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \cup \{\infty\}, \quad m_\infty(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = m_0(\mathrm{B}, \mathrm{A}) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}_\infty(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{E}_0(\mathrm{B}, \mathrm{A}).$$

- Si la matrice B est inversible, on note

$$\mathrm{Sp}_\infty(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{A}, \mathrm{B}), \quad m_\infty(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{E}_\infty(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \{0\}.$$

- Dire que (A, B) vérifie la propriété $(\mathcal{H})$ signifie

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(\mathrm{A}, \mathrm{B}), \qquad \dim(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}, \mathrm{B})) = m_\lambda(\mathrm{A}, \mathrm{B}).$$

À partir de maintenant, on prend $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Le couple (A, B) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est supposé régulier. Il existe donc un élément λ_0 de $\mathbb{C}$ pour lequel la matrice $\mathrm{A} - \lambda_0 \mathrm{B}$ est inversible. Afin de simplifier les notations, on suppose que λ_0 est nul, si bien que la matrice A est inversible.

On note d le degré du polynôme $\chi_{(\mathrm{A},\mathrm{B})}$ et on pose $\mathrm{C} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$.

Dans les questions qui suivent, on pourra être amené à distinguer le cas où la matrice B est inversible du cas où elle ne l'est pas.

II.1. Montrer les égalités $\mathrm{E}_0(\mathrm{C}) = \mathrm{E}_\infty(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \mathrm{E}_0(\mathrm{B}, \mathrm{A})$.

II.2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Montrer l'égalité $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{C}) = \mathrm{E}_{1/\lambda}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$.

II.3. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des éléments distincts de $\mathbb{C}$. On suppose que ces nombres sont les valeurs propres de la matrice C. Montrer l'égalité

$$\mathrm{Sp}_\infty(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = \left\{ \frac{1}{\lambda_1}, \ldots, \frac{1}{\lambda_k} \right\},$$

où le quotient $1/0$ est exceptionnellement noté ∞.

II.4. Vérifier l'égalité $m_\infty(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = n - d$. En déduire l'égalité

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(\mathrm{A},\mathrm{B})} m_\lambda(\mathrm{A}, \mathrm{B}) = n.$$

II.5. Jusqu'à la fin, on suppose que le couple (A, B) vérifie la propriété $\mathcal{H}$.

II.5.a. Montrer l'égalité

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}_\infty(\mathrm{A},\mathrm{B})} \dim(\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A}, \mathrm{B})) = n.$$

II.5.b. Montrer que la matrice C est diagonalisable.

II.5.c. Montrer que le couple (A, B) est diagonalisable.

Problème II (piste rouge)

On note E un espace vectoriel réel de dimension finie. On note n sa dimension et on suppose qu'elle est supérieure ou égale à 2.

Pour tout couple (A, B) d'endomorphismes de E, le composé $\mathrm{A} \circ \mathrm{B}$ sera abrégé en AB.

Pour tout couple (A, B) d'endomorphismes de E, on note [1]

$$[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = \mathrm{A} \circ \mathrm{B} - \mathrm{B} \circ \mathrm{A} = \mathrm{AB} - \mathrm{BA}.$$

L'endomorphisme identité de E sera noté I.

Première partie

Dans toute cette partie, on considère deux endomorphismes A et B de E *non nuls*. On suppose qu'il existe α dans $\mathbb{R}^*$ vérifiant la relation $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = \alpha \mathrm{B}$.

I.1.a. Pour tout triplet $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})$ d'endomorphismes de E, vérifier l'égalité

$$[\mathrm{U}, \mathrm{VW}] = [\mathrm{U}, \mathrm{V}]\mathrm{W} + \mathrm{V}[\mathrm{U}, \mathrm{W}].$$

b. Pour tout polynôme P dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, vérifier l'égalité

$$[\mathrm{A}, \mathrm{P}(\mathrm{B})] = \alpha \mathrm{B}\mathrm{P}'(\mathrm{B}).$$

En déduire que $\mathrm{Ker}(\mathrm{B}^k)$ est stable par A pour tout k dans $\mathbb{N}$.

c. Montrer que B possède un polynôme annulateur non trivial. On considère alors un tel polynôme annulateur P, que l'on suppose de degré minimal, et on note d son degré.

Montrer l'égalité $\mathrm{XP}' = d\mathrm{P}$. En déduire que B^n est nul.

I.2. Dans cette question, on suppose que B est de rang $n - 1$.

a. Montrer que la suite $(\mathrm{rg}(\mathrm{B}^i) - \mathrm{rg}(\mathrm{B}^{i+1}))_{i \geqslant 0}$ est décroissante. En déduire que B^{n-1} n'est pas nul.

On prend x dans E tel que $\mathrm{B}^{n-1}(x)$ ne soit pas nul. Montrer qu'en posant

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad x_k = \mathrm{B}^{n-k}(x),$$

la famille $(x_1, \ldots, x_k)$ est une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{B}^k)$ pour tout k dans $[\![1, n]\!]$.

b. Montrer que x_1 est un vecteur propre de A. On notera λ la valeur propre associée. Quelle est la forme de la matrice de A relativement à la base $(x_1, \ldots, x_n)$ de E ? Préciser les coefficients diagonaux.

En déduire en particulier que le nombre $\lambda - (n-1)\alpha$ est une valeur propre de A.

c. Soit x un vecteur propre de A. On note μ la valeur propre de A associée au vecteur propre x. Montrer que $\mathrm{B}(x)$ est soit le vecteur nul de E soit un vecteur propre de A, dont on précisera alors la valeur propre associée.

d. Soit e_n un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda - (n-1)\alpha$. On pose $e_k = \mathrm{B}^{n-k}(e_n)$ pour tout k dans $[\![1, n]\!]$. Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E dans laquelle l'endomorphisme A se diagonalise. Donner les expressions des matrices de A et de B dans cette base.

---

1. On parle de *crochets de Lie*, en référence au mathématicien norvégien Sophus Lie (1842-1899).

Deuxième partie

Dans cette partie, on considère trois endomorphismes $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ *non nuls* de E. On suppose qu'il existe α et β dans $\mathbb{R}^*$ vérifiant les égalités $[\mathrm{A}, \mathrm{B}] = \alpha\mathrm{B}$, $[\mathrm{A}, \mathrm{C}] = \beta\mathrm{C}$ et $[\mathrm{B}, \mathrm{C}] = \mathrm{A}$.

II.1. Montrer que α et β sont nécessairement opposés. On pourra pour cela calculer $(\alpha+\beta)[\mathrm{B}, \mathrm{C}]$.

II.2. Dans cette question, on suppose que le rang de B vaut $n-1$.

a. Que vaut la somme des valeurs propres de A ? En déduire quelles sont les valeurs propres de A. Exprimer le rang de A en fonction de n.

b. Calculer explicitement la matrice de C relativement à la base de E définie à la question **I.2.d** et vérifier que, réciproquement, des endomorphismes $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ définis par de telles matrices satisfont aux conditions imposées en préambule de cette troisième partie. Quel est le rang de C ?

II.3. Dans cette question, on suppose que α vaut 2. On suppose aussi que $\{0\}$ et E sont les seuls sous-espaces vectoriels de E stables à la fois par A, B et C. Aucune hypothèse n'est faite sur le rang de B.

a. Pour tout entier i strictement positif, montrer l'égalité $[\mathrm{B}, \mathrm{C}^i] = i\mathrm{C}^{i-1}(\mathrm{A}-(i-1)\mathrm{I})$. En déduire l'existence d'une valeur propre de A. On note μ la plus grande valeur propre de A et x_1 un vecteur propre associé.

b. à l'aide de la famille $(x_1, \mathrm{C}(x_1), \ldots, \mathrm{C}^{n-1}(x_1))$, montrer que A est diagonalisable et que B et C sont de rang $n-1$.

Problème III

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Dans cette question, on suppose que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$ est non vide et on prend α dans cette intersection.

1.1. Montrer qu'il existe une matrice colonne Y non nulle telle que $\mathrm{B}^{\mathrm{T}}\mathrm{Y} = \alpha\mathrm{Y}$.

1.2. En déduire qu'il existe $\mathrm{M} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $\mathrm{AM} = \mathrm{MB}$.

2. Réciproquement, on suppose qu'il existe une matrice M non nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{AM} = \mathrm{MB}$. On note r le rang de M.

2.1. À l'aide du théorème du rang en version géométrique, justifier qu'il existe deux matrices P et Q de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que

$$\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2.2. Montrer que $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{Sp}(\mathrm{B})$ n'est pas vide.

Problème IV

On considère la matrice A_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de coefficients

$$(\mathrm{A}_n)_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ j & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(\mathrm{A}_n) \iff \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\lambda+k} = 1.$$

2. En déduire que A_n est diagonalisable.
