Chapitre 9 — réduction des endomorphismes et des matrices

1 Éléments propres

1.1 Éléments propres d'un endomorphisme

Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre. Spectre dans le cas de dimension finie. Les espaces propres sont en somme directe.

Équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$.

Une remarque en passant : les espaces propres de f relatifs à des valeurs propres non nulles sont ceux de l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ induit par f. C'est utile pour la recherche des valeurs propres non nulles des matrices de petit rang.

Si u et v commutent, alors les sous-espaces propres de v sont stables par u.

Si $u(x) = \lambda x$ alors, pour tout polynôme P, on a l'égalité $\mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{P}(\lambda)x$.

Si $\mathrm{P}(u) = 0$, alors toute valeur propre de u est une racine de P.

1.2 Éléments propres d'une matrice carrée

Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre. Ce sont les éléments propres de l'endomorphisme $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Spectre(s) d'une matrice. Exemple : matrice compagne.

Lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux des matrices représentatives. Adaptation des propriétés du paragraphe précédent.

Éléments propres de deux matrices semblables.

Utilisation du théorème du rang.

1.3 Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique χ_{A} d'une matrice carrée, défini par $\chi_{\mathrm{A}}(t) = \mathrm{dét}(t\mathrm{I}_n - \mathrm{A})$. Coefficients. Cas $n = 2$.

Polynôme caractéristique χ_u d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie. Lien entre les deux notions.

Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.

Identité $\chi_{\mathrm{A}} = \chi_{\mathrm{A}^{\mathrm{T}}}$. Égalité $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{A}^{\mathrm{T}})$.

Cas des matrices triangulaires.

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre. Toute matrice de $\mathcal{M}_{2k+1}(\mathbb{R})$ possède au moins une valeur propre réelle.

1.4 Multiplicité des valeurs propres

Définition : c'est la multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.

Expression du déterminant et de la trace dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé. Plus précisément, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de f et si leurs multiplicités sont notées $m_1, \ldots, m_p$ respectivement, alors

$$\mathrm{tr}(f) = \sum_{k=1}^{p} m_k \lambda_k \qquad \text{et} \qquad \mathrm{dét}(f) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k)^{m_k}.$$

Encadrement $1 \leqslant \dim(\mathrm{E}_\lambda(f)) \leqslant \mathrm{mult}(\lambda, f)$. Cas des endomorphismes de rang 1.

Spectre complexe des matrices réelles.

1.5 Théorème de Cayley-Hamilton

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, alors pour tout endomorphisme u de E, le polynôme χ_u est un polynôme annulateur de u.

Idem pour les matrices carrées.

2 Diagonalisation en dimension finie

2.1 Endomorphisme diagonalisable

Définition (existence d'une base dans laquelle la matrice représentative est diagonale).
Exemple : homothéties, projecteurs et symétries.
Caractérisation : existence d'une base de l'espace vectoriel constituée de vecteurs propres.
Caractérisation sur la somme des dimensions des espaces propres.
Dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé, caractérisation par l'égalité entre les dimensions d'espaces propres et les multiplicités.
Si le polynôme caractéristique est scindé, à racines simples, alors l'endomorphisme est diagonalisable et ses espaces propres sont de dimension 1.

2.2 Matrice diagonalisable

Définition : la matrice est semblable à une matrice diagonale.
Caractérisation : (l'endomorphisme $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est diagonalisable).
Reformulation de toutes les caractérisations et propriétés du paragraphe précédent.
Si A représente un certain endomorphisme f d'un certain $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, alors la diagonalisabilité de f équivaut à la diagonalisabilité de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.3 Diagonalisabilité et polynômes annulateurs

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
Corollaire : si u est diagonalisable et F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors l'endomorphisme de F induit par u est diagonalisable.
Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si il admet $\displaystyle\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (\mathrm{X} - \lambda)$ pour polynôme annulateur.

3 Trigonalisation en dimension finie

3.1 Endomorphisme trigonalisable

Définition (représentation matricielle triangulaire supérieure).
Interprétation en termes de sous-espaces stables.
Remarque sur le fait que les matrices triangulaires inférieures eussent sis tout autant.
Théorème : un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

3.2 Matrice trigonalisable

Définition (matrice semblable à une matrice triangulaire supérieure).
Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Exemple de trigonalisation : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Programme de colles n$^{\text{o}}$ 6 (du lundi 19 au vendredi 20 décembre 2024)

Tout ce chapitre.
